Recorrências e arredondamento

Divisão e conquista leva a recorrências como:

Recorrências e arredondamento

Divisão e conquista leva a recorrências como:

$$T(n) = T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + n$$

$$T(n) = 3T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + n^2$$

$$T(n) = T(\sqrt{n}) + n$$

Recorrências e arredondamento

Divisão e conquista leva a recorrências como:

$$T(n) = T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + n$$
$$T(n) = 3T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + n^2$$
$$T(n) = T(\sqrt{n}) + n$$

Em geral:

$$T(n) = g_1(n)T(h_1(n)) + \cdots + g_k(n)T(h_k(n)) + f(n)$$

onde, para todo i, $0 \leq h_i(n) < n$, tudo para $n \geq n_0$ (algum n_0 dado). Os valores iniciais $T(0), T(1), \ldots, T(n_0 - 1)$ também são dados.

Números especiais

Às vezes existe uma sequência de inteiros

$$n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$$

que são especiais para essa recorrência, no sentido que para todos i, j

$$h_i(n_j) = n_{j-1}$$

Números especiais

Às vezes existe uma sequência de inteiros

$$n_1 < n_2 < n_3 < \dots$$

que são especiais para essa recorrência, no sentido que para todos i, j

$$h_i(n_j) = n_{j-1}$$

E aí temos a recorrência

$$T(n_j) = \left[g_1(n_j) + \cdots + g_k(n_j)\right] T(n_{j-1}) + f(n_j)$$

que pode ser mais fácil de resolver, definindo $t(j) = T(n_j)$.

Números especiais

Às vezes existe uma sequência de inteiros

$$n_1 < n_2 < n_3 < \dots$$

que são especiais para essa recorrência, no sentido que para todos i, j

$$h_i(n_j) = n_{j-1}$$

E aí temos a recorrência

$$T(n_j) = \Big[g_1(n_j) + \cdots + g_k(n_j)\Big] T(n_{j-1}) + f(n_j)$$

que pode ser mais fácil de resolver, definindo $t(j) = T(n_j)$.

No que essa solução particular ajuda o caso geral?

Simplifica

Podemos agora substituir a recorrência em n por uma em j

Simplifica

Podemos agora substituir a recorrência em n por uma em j escrevemos

$$t(j) = T(n_j) \qquad h(j) = f(n_j) \qquad g(j) = g_1(n_j) + \cdots + g_k(n_j).$$

Simplifica

Podemos agora substituir a recorrência em n por uma em j

escrevemos

$$t(j) = T(n_j) \qquad h(j) = f(n_j) \qquad g(j) = g_1(n_j) + \cdots + g_k(n_j).$$

Assim,

$$T(n_j) = \left[g_1(n_j) + \cdots + g_k(n_j)\right] T(n_{j-1}) + f(n_j)$$

vira

$$t(j) = g(j)t(j-1) + h(j)$$

que pode ser muito mais fácil de resolver.

Uma hipótese

Suponha que:

Uma hipótese

Suponha que:

Para $n > n_0$,

Uma hipótese

Suponha que:

Para $n > n_0$,

todas as funções g_i, h_i, f *são não decrescentes,*
e $g_i(n) \geq 0$.

Uma hipótese

Suponha que:

Para $n > n_0$,

todas as funções g_i, h_i, f *são não decrescentes*,
e $g_i(n) \geq 0$.

Então, segue por indução que

Uma hipótese

Suponha que:

Para $n > n_0$,

todas as funções g_i, h_i, f *são não decrescentes,*
e $g_i(n) \geq 0$.

Então, segue por indução que

$T(n)$ *é não decrescente,*
desde que isso valha para $n < n_0$.

Do particular para o geral

Defina

$$S(n) = \min\{n_j \mid n_j \geq n\}$$
$$L(n) = \max\{n_j \mid n_j \leq n\}$$

Do particular para o geral

Defina

$$S(n) = \min\{n_j \mid n_j \geq n\}$$
$$L(n) = \max\{n_j \mid n_j \leq n\}$$

Então, segue imediatamente que

$$T(L(n)) \leq T(n) \leq T(S(n))$$

Exemplo, do MergeSort

$$T(1) = 0, \quad T(n) = T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + cn$$

Exemplo, do MergeSort

$$T(1) = 0, \quad T(n) = T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + cn$$

$$g_1(n) = g_2(n) = 1, h_1(n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, h_2(n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, f(n) = cn$$

Exemplo, do MergeSort

$$T(1) = 0, \quad T(n) = T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + cn$$

$$g_1(n) = g_2(n) = 1, h_1(n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, h_2(n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, f(n) = cn$$

Números especiais:

$$n_j = 2^j$$

Exemplo, do MERGESORT

$$T(1) = 0, \quad T(n) = T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + c\,n$$

$$g_1(n) = g_2(n) = 1,\, h_1(n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor,\, h_2(n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil,\, f(n) = c\,n$$

Números especiais:

$$n_j = 2^j$$

Então,

$$t(0) = 0, \quad t(j) = 2t(j-1) + c2^j$$

E, pelo método da substituição:

$$t(j) = c\,2^j\,j = c\,n_j \lg n_j$$

Completando

Neste caso, $S(n) = 2^{\lceil \lg n \rceil}$, logo

$$T(n) \le c\, 2^{\lceil \lg n \rceil} \lceil \lg n \rceil$$

Completando

Neste caso, $S(n) = 2^{\lceil \lg n \rceil}$, logo

$$T(n) \le c\, 2^{\lceil \lg n \rceil} \lceil \lg n \rceil$$

Mas $\lceil \lg n \rceil < \lg n + 1$, logo, $2^{\lceil \lg n \rceil} < 2n$ e

$$T(n) \le 2cn(\lg n + 1) = \mathrm{O}(n \lg n)$$

Completando

Neste caso, $S(n) = 2^{\lceil \lg n \rceil}$, logo

$$T(n) \le c\, 2^{\lceil \lg n \rceil} \lceil \lg n \rceil$$

Mas $\lceil \lg n \rceil < \lg n + 1$, logo, $2^{\lceil \lg n \rceil} < 2n$ e

$$T(n) \le 2cn(\lg n + 1) = \mathrm{O}(n \lg n)$$

Como $L(n) = 2^{\lfloor \lg n \rfloor}$, um argumento análogo leva a

Completando

Neste caso, $S(n) = 2^{\lceil \lg n \rceil}$, logo

$$T(n) \leq c\, 2^{\lceil \lg n \rceil} \lceil \lg n \rceil$$

Mas $\lceil \lg n \rceil < \lg n + 1$, logo, $2^{\lceil \lg n \rceil} < 2n$ e

$$T(n) \leq 2cn(\lg n + 1) = \mathrm{O}(n \lg n)$$

Como $L(n) = 2^{\lfloor \lg n \rfloor}$, um argumento análogo leva a

$$T(n) \geq \frac{1}{2} n(\lg n - 1)$$

de onde segue que

Completando

Neste caso, $S(n) = 2^{\lceil \lg n \rceil}$, logo

$$T(n) \leq c\, 2^{\lceil \lg n \rceil} \lceil \lg n \rceil$$

Mas $\lceil \lg n \rceil < \lg n + 1$, logo, $2^{\lceil \lg n \rceil} < 2n$ e

$$T(n) \leq 2cn(\lg n + 1) = \mathrm{O}(n \lg n)$$

Como $L(n) = 2^{\lfloor \lg n \rfloor}$, um argumento análogo leva a

$$T(n) \geq \frac{1}{2} n(\lg n - 1)$$

de onde segue que

$$T(n) = \Theta(n \lg n)$$