Programação dinâmica

CLRS cap 15

= “recursão–com–tabela”
= transformação inteligente de recursão em iteração

Números de Fibonacci

$$F_0 = 0 \qquad F_1 = 1 \qquad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34

Números de Fibonacci

$$F_0 = 0 \qquad F_1 = 1 \qquad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34

Algoritmo recursivo para F_n:

```
FIBO-REC (n)
  se n ≤ 1
      então devolva n
      senão a ← FIBO-REC (n − 1)
            b ← FIBO-REC (n − 2)
            devolva a + b
```

Consumo de tempo

```
FIBO-REC (n)
se n ≤ 1
    então devolva n
    senão a ← FIBO-REC (n − 1)
          b ← FIBO-REC (n − 2)
          devolva a + b
```

Tempo em segundos:

n	16	32	40	41	42	43	44	45	47
tempo	0.002	0.06	2.91	4.71	7.62	12.37	19.94	32.37	84.50

$F_{47} = 2971215073$

Consumo de tempo

```
FIBO-REC (n)
1  se n ≤ 1
2      então devolva n
3      senão a ← FIBO-REC (n − 1)
4            b ← FIBO-REC (n − 2)
5            devolva a + b
```

$T(n) :=$ número de somas feitas por FIBO-REC (n)

linha	número de somas
1-2	$= 0$
3	$= T(n-1)$
4	$= T(n-2)$
5	$= 1$
$T(n)$	$= T(n-1) + T(n-2) + 1$

Recorrência

$$T(0) = 0$$
$$T(1) = 0$$
$$T(n) = T(n-1) + T(n-2) + 1 \quad \text{para } n = 2, 3, \ldots$$

A que classe Ω pertence $T(n)$?
A que classe O pertence $T(n)$?

Recorrência

$$T(0) = 0$$
$$T(1) = 0$$
$$T(n) = T(n-1) + T(n-2) + 1 \quad \text{para } n = 2, 3, \ldots$$

A que classe Ω pertence $T(n)$?
A que classe O pertence $T(n)$?

Solução: $T(n) > (3/2)^n$ para $n \geq 6$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
T_n	0	0	1	2	4	7	12	20	33	
$(3/2)^n$	1	1.5	2.25	3.38	5.06	7.59	11.39	17.09	25.63	3

Recorrência

Prova: $T(6) = 12 > 11.40 > (3/2)^6$ e $T(7) = 20 > 18 > (3/2)^7$.
Se $n \geq 8$, então

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(n-1) + T(n-2) + 1 \\
&\overset{\text{hi}}{>} (3/2)^{n-1} + (3/2)^{n-2} + 1 \\
&= (3/2+1)(3/2)^{n-2} + 1 \\
&> (5/2)(3/2)^{n-2} \\
&> (9/4)(3/2)^{n-2} \\
&= (3/2)^2(3/2)^{n-2} \\
&= (3/2)^n .
\end{aligned}
$$

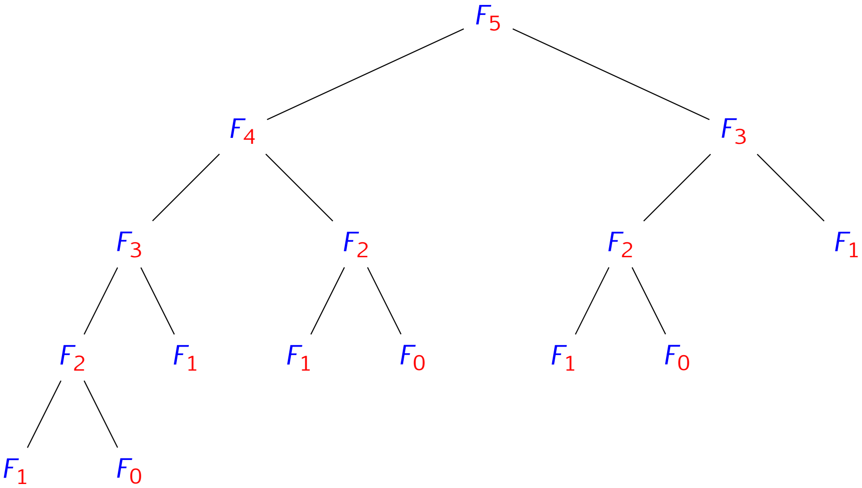
Logo, $T(n)$ é $\Omega((3/2)^n)$.

Verifique que $T(n)$ é $O(2^n)$.

Consumo de tempo

Consumo de tempo é exponencial.

Algoritmo resolve subproblemas muitas vezes.



Resolve subproblemas muitas vezes

```
FIBO-REC(5)
  FIBO-REC(4)
    FIBO-REC(3)
      FIBO-REC(2)
        FIBO-REC(1)
        FIBO-REC(0)
      FIBO-REC(1)
    FIBO-REC(2)
      FIBO-REC(1)
      FIBO-REC(0)
  FIBO-REC(3)
    FIBO-REC(2)
      FIBO-REC(1)
      FIBO-REC(0)
    FIBO-REC(1)
```

FIBO-REC(5) = 5

Resolve subproblemas muitas vezes

```
FIBO-REC(8)
  FIBO-REC(7)
    FIBO-REC(6)
      FIBO-REC(5)
        FIBO-REC(4)
          FIBO-REC(3)
            FIBO-REC(2)
              FIBO-REC(1)
              FIBO-REC(0)
            FIBO-REC(1)
          FIBO-REC(2)
            FIBO-REC(1)
            FIBO-REC(0)
        FIBO-REC(3)
          FIBO-REC(2)
            FIBO-REC(1)
            FIBO-REC(0)
          FIBO-REC(1)
      FIBO-REC(4)
        FIBO-REC(3)
          FIBO-REC(2)
            FIBO-REC(1)
            FIBO-REC(0)
          FIBO-REC(1)
        FIBO-REC(2)
          FIBO-REC(1)
          FIBO-REC(0)
    FIBO-REC(5)
      FIBO-REC(4)
        FIBO-REC(3)
          FIBO-REC(2)
            FIBO-REC(1)
            FIBO-REC(0)
          FIBO-REC(1)
        FIBO-REC(2)
          FIBO-REC(1)
          FIBO-REC(0)
      FIBO-REC(3)
        FIBO-REC(2)
          FIBO-REC(1)
          FIBO-REC(0)
        FIBO-REC(1)
  FIBO-REC(6)
    FIBO-REC(5)
      FIBO-REC(4)
        FIBO-REC(3)
          FIBO-REC(2)
            FIBO-REC(1)
            FIBO-REC(0)
          FIBO-REC(1)
        FIBO-REC(2)
          FIBO-REC(1)
          FIBO-REC(0)
      FIBO-REC(3)
        FIBO-REC(2)
          FIBO-REC(1)
          FIBO-REC(0)
        FIBO-REC(1)
    FIBO-REC(4)
      FIBO-REC(3)
        FIBO-REC(2)
          FIBO-REC(1)
          FIBO-REC(0)
        FIBO-REC(1)
      FIBO-REC(2)
        FIBO-REC(1)
        FIBO-REC(0)
```

Programação dinâmica

"Dynamic programming is a fancy name for divide-and-conquer with a table. Instead of solving subproblems recursively, solve them sequentially and store their solutions in a table. The trick is to solve them in the right order so that whenever the solution to a subproblem is needed, it is already available in the table. Dynamic programming is particularly useful on problems for which divide-and-conquer appears to yield an exponential number of subproblems, but there are really only a small number of subproblems repeated exponentially often. In this case, it makes sense to compute each solution the first time and store it away in a table for later use, instead of recomputing it recursively every time it is needed."

I. Parberry, *Problems on Algorithms*, Prentice Hall, 1995.

Versão recursiva com memoização

```
MEMOIZED-FIBO (f, n)
para i ← 0 até n faça
    f[i] ← −1
devolva LOOKUP-FIBO (f, n)
```

```
LOOKUP-FIBO (f, n)
se f[n] ≥ 0
    então devolva f[n]
se n ≤ 1
    então f[n] ← n
    senão f[n] ← LOOKUP-FIBO(f, n − 1)
                   + LOOKUP-FIBO(f, n − 2)
devolva f[n]
```

Não recalcula valores de f.

Algoritmo de programação dinâmica

Sem recursão:

```
FIBO (n)
    f[0] ← 0
    f[1] ← 1
    para i ← 2 até n faça
        f[i] ← f[i − 1] + f[i − 2]
    devolva f[n]
```

Note a tabela $f[0\,.\,.\,n{-}1]$.

f					$\star$	$\star$	??			

Consumo de tempo (e de espaço) é $\Theta(n)$.

Algoritmo de programação dinâmica

Versão com economia de espaço.

```
FIBO (n)
se n = 0 então devolva 0
f_ant ← 0
f_atual ← 1
para i ← 2 até n faça
    f_prox ← f_atual + f_ant
    f_ant ← f_atual
    f_atual ← f_prox
devolva f_atual
```

Algoritmo de programação dinâmica

Versão com economia de espaço.

```
FIBO (n)
se n = 0 então devolva 0
f_ant ← 0
f_atual ← 1
para i ← 2 até n faça
    f_prox ← f_atual + f_ant
    f_ant ← f_atual
    f_atual ← f_prox
devolva f_atual
```

Consumo de tempo é $\Theta(n)$.

Consumo de espaço é $\Theta(1)$.

Corte de hastes

Hastes de aço-5711 são vendidas em pedaços de tamanho inteiro. As usinas produzem hastes longas, e os comerciantes cortam em pedaços para vender.
Por razões inexplicáveis, o preço de uma haste de tamanho i está tabelado como p_i, e para o problema abaixo ter graça, é bom que isso não seja função linear de i.

Corte de hastes

Hastes de aço-5711 são vendidas em pedaços de tamanho inteiro. As usinas produzem hastes longas, e os comerciantes cortam em pedaços para vender.

Por razões inexplicáveis, o preço de uma haste de tamanho i está tabelado como p_i, e para o problema abaixo ter graça, é bom que isso não seja função linear de i.

PROBLEMA: Dada uma haste de tamanho n e a tabela de preços p_i, qual a melhor forma de cortar para maximizar o preço de venda total?

Corte de hastes

Hastes de aço-5711 são vendidas em pedaços de tamanho inteiro. As usinas produzem hastes longas, e os comerciantes cortam em pedaços para vender.

Por razões inexplicáveis, o preço de uma haste de tamanho i está tabelado como p_i, e para o problema abaixo ter graça, é bom que isso não seja função linear de i.

PROBLEMA: Dada uma haste de tamanho n e a tabela de preços p_i, qual a melhor forma de cortar para maximizar o preço de venda total?

Versão simplificada: qual o maior valor q_n que se pode obter de uma haste de tamanho n?

Solução recursiva

Corta-se um primeiro pedaço de tamanho i. e o pedaço restante, de tamanho $n - i$ do melhor jeito possível. O valor desse corte é

$$p_i + q_{n-i}$$

Solução recursiva

Corta-se um primeiro pedaço de tamanho i. e o pedaço restante, de tamanho $n - i$ do melhor jeito possível. O valor desse corte é

$$p_i + q_{n-i}$$

A questão é escolher o melhor i; é o que maximiza a expressão acima:

$$q_n = \max_{1 \le i \le n} p_i + q_{n-i}.$$

$$q_0 = 0.$$

Primeiro código

CORTA-HASTE (p, n)

se $n == 0$
    então devolva 0
$q = -\infty$
para $i = 1$ **até** n
    $q = \max(q, p[i] + \text{CORTA-HASTE}(p, n - i))$
devolva q

Primeiro código

```
CORTA-HASTE (p, n)
se n == 0
    então devolva 0
q = −∞
para i = 1 até n
    q = max(q, p[i] + CORTA-HASTE(p, n − i))
devolva q
```

Tempo:

$$T(n) = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} T(i)$$

Primeiro código

```
CORTA-HASTE (p, n)
se n == 0
    então devolva 0
q = −∞
para i = 1 até n
    q = max(q, p[i] + CORTA-HASTE(p, n − i))
devolva q
```

Tempo:

$$T(n) = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} T(i)$$

$$= 2^{n}.$$

Com memoização

Note que p e r funcionam como variáveis globais.

CORTA-HASTE-MEMOIZADO (p, n)

```
declare r[1...n]
r[0] = 0
para i = 1 até n
    r[i] = −∞
devolva CORTA-HASTE-MEMOIZADO-AUX (p, n, r)
```

Com memoização

Note que p e r funcionam como variáveis globais.

CORTA-HASTE-MEMOIZADO (p, n)

declare $r[1 \ldots n]$
$r[0] = 0$
para $i = 1$ **até** n
    $r[i] = -\infty$
devolva CORTA-HASTE-MEMOIZADO-AUX (p, n, r)

CORTA-HASTE-MEMOIZADO-AUX (p, n, r)

se $r[n] \geq 0$
    devolva $r[n]$
senão $q = -\infty$
    para $i = 1$ **até** n
        $q = \max(q, p[i] + \text{CORTA-HASTE-MEMOIZADO-AUX}(p, n - i, r))$
    $r[n] = q$
    devolva q

Bottom Up

```
CORTA-HASTE-BOTTOM-UP (n)
declare r[1...n]
r[0] = 0
para j = 1 até n
    q = −∞
    para i = 1 até j
        q = max(q, p[i] + r[j − i])
    r[j] = q
devolva q
```

Recuperando o melhor corte

CORTA-HASTE-BOTTOM-UP-COMPLETO (n)

declare $r[1 \dots n], d[1 \dots n]$
$r[0] = 0$
para $j = 1$ **até** n
    $q = -\infty$
    para $i = 1$ **até** j
        se $q < p[i] + r[j - i]$
            $q = p[i] + r[j - i]$
            $d[j] = i$
    $r[j] = q$
devolva q e d

Listando os cortes

(usando concatenação de listas, estilo python)

LISTA-CORTES(d, n)

se $n == 0$

  devolva $[\ \ ]$

senão

  devolva $[\,d\,[n]\,]$.LISTA-CORTES$(d, n - d[n])$