Programação dinâmica

CLRS 15.2–15.3

= "recursão–com–tabela"
= transformação inteligente de recursão em iteração

Multiplicação iterada de matrizes

Se A é $p \times q$ e B é $q \times r$ então AB é $p \times r$.

$(AB)[i,j] = \sum_k A[i,k]\,B[k,j]$

```
MULT-MAT (p, A, q, B, r)
para i ← 1 até p faça
    para j ← 1 até r faça
        AB[i,j] ← 0
        para k ← 1 até q faça
            AB[i,j] ← AB[i,j] + A[i,k] · B[k,j]
```

Número de multiplicações escalares = $p \cdot q \cdot r$

Multiplicação iterada

Problema: Encontrar número mínimo de multiplicações escalares necessário para calcular produto $A_1 A_2 \cdots A_n$.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
p[0] & & p[1] & & p[2] & \ldots & p[n{-}1] & & p[n] \\
& A_1 & & A_2 & & \ldots & & A_n &
\end{array}
$$

$$\text{cada } A_i \text{ é } p[i{-}1] \times p[i] \ (A_i[1 \mathinner{.\,.} p[i{-}1], 1 \mathinner{.\,.} p[i]])$$

Exemplo: $A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$

$$
\begin{array}{ccccccc}
10 & A_1 & 100 & A_2 & 5 & A_3 & 50
\end{array}
$$

$((A_1\, A_2)\, A_3)$	7500	multiplicações escalares
$(A_1\, (A_2\, A_3))$	75000	multiplicações escalares

Soluções ótimas contêm soluções ótimas

Se

$$(A_1 A_2)(A_3((A_4 A_5)A_6))$$

é ordem ótima de multiplicação então

$$(A_1 A_2) \quad \text{e} \quad (A_3((A_4 A_5)A_6))$$

também são ordens ótimas.

Soluções ótimas contêm soluções ótimas

Se

$$(A_1 A_2)(A_3((A_4 A_5)A_6))$$

é ordem ótima de multiplicação então

$$(A_1 A_2) \quad \text{e} \quad (A_3((A_4 A_5)A_6))$$

também são ordens ótimas.

Decomposição: $(A_i \cdots A_k)(A_{k+1} \cdots A_j)$

$m[i,j] =$ número mínimo de multiplicações escalares para calcular $A_i \cdots A_j$

Recorrência

$m[i,j] =$ número mínimo de multiplicações escalares para calcular $A_i \cdots A_j$

se $i = j$ então $m[i,j] = 0$

se $i < j$ então

$$m[i,j] = \min_{i \leq k < j} \{ m[i,k] + p[i-1]p[k]p[j] + m[k+1,j] \}$$

Exemplo:

$$m[3,7] = \min_{3 \leq k < 7} \{ m[3,k] + p[2]p[k]p[7] + m[k+1,7] \}$$

Algoritmo recursivo

Recebe $p[i-1\,..\,j]$ e devolve $m[i,j]$

REC-MAT-CHAIN (p, i, j)

se $i = j$
    então devolva 0
$m[i,j] \leftarrow \infty$
para $k \leftarrow i$ **até** $j-1$ **faça**
    $q_1 \leftarrow$ REC-MAT-CHAIN(p, i, k)
    $q_2 \leftarrow$ REC-MAT-CHAIN$(p, k+1, j)$
    $q \leftarrow q_1 + p[i-1]p[k]p[j] + q_2$
    se $q < m[i,j]$
        então $m[i,j] \leftarrow q$
devolva $m[i,j]$

Consumo de tempo?

Consumo de tempo

$T(n) =$ número comparações entre q e $m[\star,\star]$
na linha 8 quando $n := j - i + 1$

$$
\begin{aligned}
T(1) &= 0 \\
T(n) &= \sum_{h=1}^{n-1} (T(h) + T(n-h) + 1) = 2 \sum_{h=2}^{n-1} T(h) + (n-1) \\
&= 2(T(2) + \cdots + T(n-1)) + (n-1) \text{ para } n \geq 2
\end{aligned}
$$

Consumo de tempo

$T(n) =$ número comparações entre q e $m[\star, \star]$
na linha 8 quando $n := j - i + 1$

$$T(n) \;=\; 2(T(2) + \cdots + T(n{-}1)) \;+\; (n-1)$$

Considere a mesma fórmula para $n-1$:

$$T(n-1) \;=\; 2(T(2) + \cdots + T(n{-}2)) \;+\; (n-2)$$

e subtraia a primeira da segunda:

Consumo de tempo

$T(n) =$ número comparações entre q e $m[\star,\star]$
na linha 8 quando $n := j - i + 1$

$$T(n) \;=\; 2(T(2) + \cdots + T(n{-}1)) \;+\; (n-1)$$

Considere a mesma fórmula para $n-1$:

$$T(n-1) \;=\; 2(T(2) + \cdots + T(n{-}2)) \;+\; (n-2)$$

e subtraia a primeira da segunda:

$$T(n) - T(n-1) \;=\; 2\,T(n-1) + 1.$$

Logo $T(n) \;=\; 3\,T(n-1) + 1.$

Consumo de tempo

$T(n) =$ número comparações entre q e $m[\star, \star]$
na linha 8 quando $n := j - i + 1$

$$T(n) \;=\; 2(T(2) + \cdots + T(n-1)) \;+\; (n-1)$$

Considere a mesma fórmula para $n-1$:

$$T(n-1) \;=\; 2(T(2) + \cdots + T(n-2)) \;+\; (n-2)$$

e subtraia a primeira da segunda:

$$T(n) - T(n-1) \;=\; 2\,T(n-1) + 1.$$

Logo $T(n) \;=\; 3\,T(n-1) + 1.$

Fácil verificar que $T(n) \geq \frac{3^{n-1}-1}{2}$ para $n \geq 1$.

Recorrência

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$T(n)$	0	1	4	13	40	121	364	1093
$3^{n-1}-1$	0	2	8	26	80	242	728	2186

Prova: Para $n = 1$, $T(1) = 0 = (1-1)/2$.

Recorrência

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$T(n)$	0	1	4	13	40	121	364	1093
$3^{n-1}-1$	0	2	8	26	80	242	728	2186

Prova: Para $n = 1$, $T(1) = 0 = (1-1)/2$.

Para $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} T(n) &= 3T(n-1)+1 \\ &\overset{\text{hi}}{=} 3\left(\frac{3^{n-1}-1}{2}\right)+1 \\ &= \frac{3^n-3}{2}+1 = \frac{3^n-3+2}{2} \\ &= \frac{3^n-1}{2}. \end{aligned}$$

Conclusão

$T(n) \geq \frac{3^{n-1}-1}{2}$ para $n \geq 1$.

O consumo de tempo do algoritmo REC-MAT-CHAIN é $\Omega(3^n)$.

Resolve subproblemas muitas vezes

$p[0] = 10 \quad p[1] = 100 \quad p[2] = 5 \quad p[3] = 50$

```
REC-MAT-CHAIN(p, 1, 3)
  REC-MAT-CHAIN(p, 1, 1)
  REC-MAT-CHAIN(p, 2, 3)
    REC-MAT-CHAIN(p, 2, 2)
    REC-MAT-CHAIN(p, 3, 3)
  REC-MAT-CHAIN(p, 1, 2)
    REC-MAT-CHAIN(p, 1, 1)
    REC-MAT-CHAIN(p, 2, 2)
  REC-MAT-CHAIN(p, 3, 3)
```

Número mínimo de mults = 7500

Resolve subproblemas muitas vezes

```
REC-MAT-CHAIN(p, 1, 5)
  REC-MAT-CHAIN(p, 1, 1)
  REC-MAT-CHAIN(p, 2, 5)
    REC-MAT-CHAIN(p, 2, 2)
    REC-MAT-CHAIN(p, 3, 5)
      REC-MAT-CHAIN(p, 3, 3)
      REC-MAT-CHAIN(p, 4, 5)
        REC-MAT-CHAIN(p, 4, 4)
        REC-MAT-CHAIN(p, 5, 5)
      REC-MAT-CHAIN(p, 3, 4)
        REC-MAT-CHAIN(p, 3, 3)
        REC-MAT-CHAIN(p, 4, 4)
      REC-MAT-CHAIN(p, 5, 5)
    REC-MAT-CHAIN(p, 2, 3)
      REC-MAT-CHAIN(p, 2, 2)
      REC-MAT-CHAIN(p, 3, 3)
    REC-MAT-CHAIN(p, 4, 5)
      REC-MAT-CHAIN(p, 4, 4)
      REC-MAT-CHAIN(p, 5, 5)
    REC-MAT-CHAIN(p, 2, 4)
      REC-MAT-CHAIN(p, 2, 2)
      REC-MAT-CHAIN(p, 3, 4)
        REC-MAT-CHAIN(p, 3, 3)
        REC-MAT-CHAIN(p, 4, 4)
      REC-MAT-CHAIN(p, 2, 3)
        REC-MAT-CHAIN(p, 2, 2)
        REC-MAT-CHAIN(p, 3, 3)
```

```
      REC-MAT-CHAIN(p, 4, 4)
    REC-MAT-CHAIN(p, 5, 5)
  REC-MAT-CHAIN(p, 1, 2)
    REC-MAT-CHAIN(p, 1, 1)
    REC-MAT-CHAIN(p, 2, 2)
  REC-MAT-CHAIN(p, 3, 5)
    REC-MAT-CHAIN(p, 3, 3)
    REC-MAT-CHAIN(p, 4, 5)
      REC-MAT-CHAIN(p, 4, 4)
      REC-MAT-CHAIN(p, 5, 5)
    REC-MAT-CHAIN(p, 3, 4)
      REC-MAT-CHAIN(p, 3, 3)
      REC-MAT-CHAIN(p, 4, 4)
    REC-MAT-CHAIN(p, 5, 5)
  REC-MAT-CHAIN(p, 1, 3)
    REC-MAT-CHAIN(p, 1, 1)
    REC-MAT-CHAIN(p, 2, 3)
      REC-MAT-CHAIN(p, 2, 2)
      REC-MAT-CHAIN(p, 3, 3)
    REC-MAT-CHAIN(p, 1, 2)
      REC-MAT-CHAIN(p, 1, 1)
      REC-MAT-CHAIN(p, 2, 2)
    REC-MAT-CHAIN(p, 3, 3)
  REC-MAT-CHAIN(p, 4, 5)
    REC-MAT-CHAIN(p, 4, 4)
    REC-MAT-CHAIN(p, 5, 5)
  REC-MAT-CHAIN(p, 1, 4)
```

```
    REC-MAT-CHAIN(p, 1, 1)
    REC-MAT-CHAIN(p, 2, 4)
      REC-MAT-CHAIN(p, 2, 2)
      REC-MAT-CHAIN(p, 3, 4)
        REC-MAT-CHAIN(p, 3, 3)
        REC-MAT-CHAIN(p, 4, 4)
      REC-MAT-CHAIN(p, 2, 3)
        REC-MAT-CHAIN(p, 2, 2)
        REC-MAT-CHAIN(p, 3, 3)
      REC-MAT-CHAIN(p, 4, 4)
    REC-MAT-CHAIN(p, 1, 2)
      REC-MAT-CHAIN(p, 1, 1)
      REC-MAT-CHAIN(p, 2, 2)
    REC-MAT-CHAIN(p, 3, 4)
      REC-MAT-CHAIN(p, 3, 3)
      REC-MAT-CHAIN(p, 4, 4)
    REC-MAT-CHAIN(p, 1, 3)
      REC-MAT-CHAIN(p, 1, 1)
      REC-MAT-CHAIN(p, 2, 3)
        REC-MAT-CHAIN(p, 2, 2)
        REC-MAT-CHAIN(p, 3, 3)
      REC-MAT-CHAIN(p, 1, 2)
        REC-MAT-CHAIN(p, 1, 1)
        REC-MAT-CHAIN(p, 2, 2)
      REC-MAT-CHAIN(p, 3, 3)
    REC-MAT-CHAIN(p, 4, 4)
  REC-MAT-CHAIN(p, 5, 5)
```

Programação dinâmica

Cada subproblema

$$A_i \cdots A_j$$

é resolvido uma só vez.

Em que ordem calcular os componentes da tabela m?

Para calcular $m[2,6]$ preciso de ...

Programação dinâmica

Cada subproblema

$$A_i \cdots A_j$$

é resolvido uma só vez.

Em que ordem calcular os componentes da tabela m?

Para calcular $m[2,6]$ preciso de ...

$m[2,2]$, $m[2,3]$, $m[2,4]$, $m[2,5]$ e de
$m[3,6]$, $m[4,6]$, $m[5,6]$, $m[6,6]$.

Programação dinâmica

Cada subproblema

$$A_i \cdots A_j$$

é resolvido uma só vez.

Em que ordem calcular os componentes da tabela m?

Para calcular $m[2,6]$ preciso de ...

$m[2,2]$, $m[2,3]$, $m[2,4]$, $m[2,5]$ e de
$m[3,6]$, $m[4,6]$, $m[5,6]$, $m[6,6]$.

Calcule todos os $m[i,j]$ com $j - i + 1 = 2$,
depois todos com $j - i + 1 = 3$,
depois todos com $j - i + 1 = 4$,
etc.

Programação dinâmica

	1	2	3	4	5	6	7	8	j
1	0								
2		0	⋆	⋆	⋆	??			
3			0			⋆			
4				0		⋆			
5					0	⋆			
6						0			
7							0		
8								0	
i									

Simulação

$p[0]{=}10 \;\; p[1]{=}10 \;\; p[2]{=}20 \;\; p[3]{=}30 \;\; p[4]{=}10 \;\; p[5]{=}15 \;\; p[6]{=}30$

Simulação

$p[0]=10$ $p[1]=10$ $p[2]=20$ $p[3]=30$ $p[4]=10$ $p[5]=15$ $p[6]=30$

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6
1	0	??				
2		0				
3			0			
4				0		
5					0	
6						0

Simulação

$p[0]{=}10\ \ p[1]{=}10\ \ p[2]{=}20\ \ p[3]{=}30\ \ p[4]{=}10\ \ p[5]{=}15\ \ p[6]{=}30$

	1	2	3	4	5	6	j
1	0	2000					
2		0					
3			0				
4				0			
5					0		
6						0	

$m[1,1]+p[1-1]p[1]p[2]+m[1+1,2]=0+2000+0=2000$

Simulação

$p[0]{=}10 \quad p[1]{=}10 \quad p[2]{=}20 \quad p[3]{=}30 \quad p[4]{=}10 \quad p[5]{=}15 \quad p[6]{=}30$

	1	2	3	4	5	6	j
1	0	2000					
2		0	??				
3			0				
4				0			
5					0		
6						0	
i							

Simulação

$p[0]{=}10 \;\; p[1]{=}10 \;\; p[2]{=}20 \;\; p[3]{=}30 \;\; p[4]{=}10 \;\; p[5]{=}15 \;\; p[6]{=}30$

	1	2	3	4	5	6	j
1	0	2000					
2		0	6000				
3			0				
4				0			
5					0		
6						0	

$$m[2,2]+p[2{-}1]p[2]p[3]+m[2{+}1,3]{=}0{+}6000{+}0{=}6000$$

Simulação

$p[0]=10$ $p[1]=10$ $p[2]=20$ $p[3]=30$ $p[4]=10$ $p[5]=15$ $p[6]=30$

i \ j	1	2	3	4	5	6
1	0	2000				
2		0	6000			
3			0	??		
4				0		
5					0	
6						0

Simulação

$p[0]{=}10 \;\; p[1]{=}10 \;\; p[2]{=}20 \;\; p[3]{=}30 \;\; p[4]{=}10 \;\; p[5]{=}15 \;\; p[6]{=}30$

	1	2	3	4	5	6	j
1	0	2000					
2		0	6000				
3			0	6000			
4				0			
5					0		
6						0	

$$m[3,3] + p[3{-}1]p[3]p[4] + m[3{+}1,4]{=}0{+}6000{+}0{=}6000$$

Simulação

$p[0]{=}10 \quad p[1]{=}10 \quad p[2]{=}20 \quad p[3]{=}30 \quad p[4]{=}10 \quad p[5]{=}15 \quad p[6]{=}30$

i \ j	1	2	3	4	5	6
1	0	2000				
2		0	6000			
3			0	6000		
4				0	??	
5					0	
6						0

Simulação

$p[0]{=}10 \;\; p[1]{=}10 \;\; p[2]{=}20 \;\; p[3]{=}30 \;\; p[4]{=}10 \;\; p[5]{=}15 \;\; p[6]{=}30$

	1	2	3	4	5	6
1	0	2000				
2		0	6000			
3			0	6000		
4				0	4500	
5					0	
6						0

j

$m[4,4]+p[4{-}1]p[4]p[5]+m[4{+}1,5]{=}0{+}4500{+}0{=}4500$

Simulação

$p[0]=10$ $p[1]=10$ $p[2]=20$ $p[3]=30$ $p[4]=10$ $p[5]=15$ $p[6]=30$

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6
1	0	2000				
2		0	6000			
3			0	6000		
4				0	4500	
5					0	??
6						0

Simulação

$p[0]{=}10 \;\; p[1]{=}10 \;\; p[2]{=}20 \;\; p[3]{=}30 \;\; p[4]{=}10 \;\; p[5]{=}15 \;\; p[6]{=}30$

	1	2	3	4	5	6
1	0	2000				
2		0	6000			
3			0	6000		
4				0	4500	
5					0	4500
6						0

j

$m[5,5]+p[5{-}1]p[5]p[6]+m[5{+}1,6]{=}0{+}4500{+}0{=}4500$

Simulação

$p[0]{=}10$ $p[1]{=}10$ $p[2]{=}20$ $p[3]{=}30$ $p[4]{=}10$ $p[5]{=}15$ $p[6]{=}30$

i \ j	1	2	3	4	5	6
1	0	2000	??			
2		0	6000			
3			0	6000		
4				0	4500	
5					0	4500
6						0

Simulação

$p[0]{=}10 \;\; p[1]{=}10 \;\; p[2]{=}20 \;\; p[3]{=}30 \;\; p[4]{=}10 \;\; p[5]{=}15 \;\; p[6]{=}30$

	1	2	3	4	5	6	j
1	0	2000	9000				
2		0	6000				
3			0	6000			
4				0	4500		
5					0	4500	
6						0	

$$m[1,1] + p[1{-}1]p[1]p[3] + m[1{+}1,3] = 0 + 3000 + 6000 = 9000$$

Simulação

$p[0]{=}10\ \ p[1]{=}10\ \ p[2]{=}20\ \ p[3]{=}30\ \ p[4]{=}10\ \ p[5]{=}15\ \ p[6]{=}30$

	1	2	3	4	5	6	j
1	0	2000	8000				
2		0	6000				
3			0	6000			
4				0	4500		
5					0	4500	
6						0	

$$m[1,2]+p[1{-}1]p[2]p[3]+m[2{+}1,3]{=}2000{+}6000{+}0{=}8000$$

Simulação

$p[0]=10$ $p[1]=10$ $p[2]=20$ $p[3]=30$ $p[4]=10$ $p[5]=15$ $p[6]=30$

	1	2	3	4	5	6	j
1	0	2000	8000				
2		0	6000	??			
3			0	6000			
4				0	4500		
5					0	4500	
6						0	
i							

Simulação

$p[0]{=}10 \;\; p[1]{=}10 \;\; p[2]{=}20 \;\; p[3]{=}30 \;\; p[4]{=}10 \;\; p[5]{=}15 \;\; p[6]{=}30$

	1	2	3	4	5	6	j
1	0	2000	8000				
2		0	6000	8000			
3			0	6000			
4				0	4500		
5					0	4500	
6						0	

$$m[2,2]+p[2{-}1]p[2]p[4]+m[2{+}1,4]=0{+}2000{+}6000{=}8000$$

Simulação

$p[0]{=}10 \;\; p[1]{=}10 \;\; p[2]{=}20 \;\; p[3]{=}30 \;\; p[4]{=}10 \;\; p[5]{=}15 \;\; p[6]{=}30$

	1	2	3	4	5	6	j
1	0	2000	8000				
2		0	6000	8000			
3			0	6000			
4				0	4500		
5					0	4500	
6						0	

$$m[2,3]+p[2{-}1]p[3]p[4]+m[3{+}1,4]{=}6000{+}3000{+}0{=}9000$$

Simulação

$p[0]{=}10$ $p[1]{=}10$ $p[2]{=}20$ $p[3]{=}30$ $p[4]{=}10$ $p[5]{=}15$ $p[6]{=}30$

i \ j	1	2	3	4	5	6
1	0	2000	8000			
2		0	6000	8000		
3			0	6000	??	
4				0	4500	
5					0	4500
6						0

Simulação

$p[0]{=}10 \quad p[1]{=}10 \quad p[2]{=}20 \quad p[3]{=}30 \quad p[4]{=}10 \quad p[5]{=}15 \quad p[6]{=}30$

	1	2	3	4	5	6	j
1	0	2000	8000				
2		0	6000	8000			
3			0	6000	13500		
4				0	4500		
5					0	4500	
6						0	

$m[3,3] + p[3{-}1]p[3]p[5] + m[3{+}1,5] = 0 + 9000 + 4500 = 13500$

Simulação

$p[0]{=}10\ \ p[1]{=}10\ \ p[2]{=}20\ \ p[3]{=}30\ \ p[4]{=}10\ \ p[5]{=}15\ \ p[6]{=}30$

	1	2	3	4	5	6	j
1	0	2000	8000				
2		0	6000	8000			
3			0	6000	9000		
4				0	4500		
5					0	4500	
6						0	

$m[3,4] + p[3{-}1]p[4]p[5] + m[4{+}1,5] {=} 6000 {+} 3000 {+} 0 {=} 9000$

Simulação

$p[0]=10$ $p[1]=10$ $p[2]=20$ $p[3]=30$ $p[4]=10$ $p[5]=15$ $p[6]=30$

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6
1	0	2000	8000			
2		0	6000	8000		
3			0	6000	9000	
4				0	4500	??
5					0	4500
6						0

Simulação

$p[0]{=}10 \;\; p[1]{=}10 \;\; p[2]{=}20 \;\; p[3]{=}30 \;\; p[4]{=}10 \;\; p[5]{=}15 \;\; p[6]{=}30$

	1	2	3	4	5	6	j
1	0	2000	8000				
2		0	6000	8000			
3			0	6000	9000		
4				0	4500	13500	
5					0	4500	
6						0	

$$m[4,4] + p[4{-}1]p[4]p[6] + m[4{+}1,6] = 0 + 9000 + 4500 = 13500$$

Simulação

$p[0]=10 \;\; p[1]=10 \;\; p[2]=20 \;\; p[3]=30 \;\; p[4]=10 \;\; p[5]=15 \;\; p[6]=30$

	1	2	3	4	5	6	j
1	0	2000	8000				
2		0	6000	8000			
3			0	6000	9000		
4				0	4500	13500	
5					0	4500	
6						0	

$m[4,5]+p[4{-}1]p[5]p[6]+m[5{+}1,6]=4500+13500+0=18000$

Simulação

$p[0]=10$ $p[1]=10$ $p[2]=20$ $p[3]=30$ $p[4]=10$ $p[5]=15$ $p[6]=30$

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6
1	0	2000	8000	??		
2		0	6000	8000		
3			0	6000	9000	
4				0	4500	13500
5					0	4500
6						0

Simulação

$p[0]{=}10 \;\; p[1]{=}10 \;\; p[2]{=}20 \;\; p[3]{=}30 \;\; p[4]{=}10 \;\; p[5]{=}15 \;\; p[6]{=}30$

	1	2	3	4	5	6	j
1	0	2000	8000	9000			
2		0	6000	8000			
3			0	6000	9000		
4				0	4500	13500	
5					0	4500	
6						0	

$$m[1,1]+p[1{-}1]p[1]p[4]+m[1{+}1,4]{=}0{+}1000{+}8000{=}9000$$

Simulação

$p[0]{=}10 \;\; p[1]{=}10 \;\; p[2]{=}20 \;\; p[3]{=}30 \;\; p[4]{=}10 \;\; p[5]{=}15 \;\; p[6]{=}30$

	1	2	3	4	5	6	j
1	0	2000	8000	9000			
2		0	6000	8000			
3			0	6000	9000		
4				0	4500	13500	
5					0	4500	
6						0	

$m[1,2]+p[1{-}1]p[2]p[4]+m[2{+}1,4]{=}2000{+}2000{+}6000{=}10000$

Simulação

$p[0]{=}10 \quad p[1]{=}10 \quad p[2]{=}20 \quad p[3]{=}30 \quad p[4]{=}10 \quad p[5]{=}15 \quad p[6]{=}30$

	1	2	3	4	5	6	j
1	0	2000	8000	9000			
2		0	6000	8000			
3			0	6000	9000		
4				0	4500	13500	
5					0	4500	
6						0	

$$m[1,3] + p[1{-}1]p[3]p[4] + m[3{+}1,4] = 8000 + 3000 + 0 = 11000$$

Simulação

$p[0]{=}10$ $p[1]{=}10$ $p[2]{=}20$ $p[3]{=}30$ $p[4]{=}10$ $p[5]{=}15$ $p[6]{=}30$

	1	2	3	4	5	6	j
1	0	2000	8000	9000			
2		0	6000	8000	??		
3			0	6000	9000		
4				0	4500	13500	
5					0	4500	
6						0	
i							

Simulação

$p[0]{=}10 \;\; p[1]{=}10 \;\; p[2]{=}20 \;\; p[3]{=}30 \;\; p[4]{=}10 \;\; p[5]{=}15 \;\; p[6]{=}30$

	1	2	3	4	5	6
1	0	2000	8000	9000		
2		0	6000	8000	12000	
3			0	6000	9000	
4				0	4500	13500
5					0	4500
6						0

j

$$m[2,2]+p[2{-}1]p[2]p[5]+m[2{+}1,5]{=}0{+}3000{+}9000{=}12000$$

Simulação

$p[0]{=}10 \;\; p[1]{=}10 \;\; p[2]{=}20 \;\; p[3]{=}30 \;\; p[4]{=}10 \;\; p[5]{=}15 \;\; p[6]{=}30$

	1	2	3	4	5	6	j
1	0	2000	8000	9000			
2		0	6000	8000	12000		
3			0	6000	9000		
4				0	4500	13500	
5					0	4500	
6						0	

$m[2,3] + p[2{-}1]p[3]p[5] + m[3{+}1,5] = 6000 + 4500 + 4500 = 15000$

Simulação

$p[0]{=}10 \;\; p[1]{=}10 \;\; p[2]{=}20 \;\; p[3]{=}30 \;\; p[4]{=}10 \;\; p[5]{=}15 \;\; p[6]{=}30$

	1	2	3	4	5	6	j
1	0	2000	8000	9000			
2		0	6000	8000	9500		
3			0	6000	9000		
4				0	4500	13500	
5					0	4500	
6						0	

$m[2,4]+p[2{-}1]p[4]p[5]+m[4{+}1,5]{=}8000{+}1500{+}0{=}9500$

Simulação

$p[0]{=}10$ $p[1]{=}10$ $p[2]{=}20$ $p[3]{=}30$ $p[4]{=}10$ $p[5]{=}15$ $p[6]{=}30$

	1	2	3	4	5	6	j
1	0	2000	8000	9000			
2		0	6000	8000	9500		
3			0	6000	9000	??	
4				0	4500	13500	
5					0	4500	
6						0	
i							

Simulação

$p[0]{=}10 \;\; p[1]{=}10 \;\; p[2]{=}20 \;\; p[3]{=}30 \;\; p[4]{=}10 \;\; p[5]{=}15 \;\; p[6]{=}30$

	1	2	3	4	5	6	j
1	0	2000	8000	9000			
2		0	6000	8000	9500		
3			0	6000	9000	31500	
4				0	4500	13500	
5					0	4500	
6						0	

$m[3,3]+p[3-1]p[3]p[6]+m[3+1,6]{=}0{+}18000{+}13500{=}31500$

Simulação

$p[0]{=}10 \quad p[1]{=}10 \quad p[2]{=}20 \quad p[3]{=}30 \quad p[4]{=}10 \quad p[5]{=}15 \quad p[6]{=}30$

	1	2	3	4	5	6	j
1	0	2000	8000	9000			
2		0	6000	8000	9500		
3			0	6000	9000	16500	
4				0	4500	13500	
5					0	4500	
6						0	

$m[3,4] + p[3{-}1]p[4]p[6] + m[4{+}1,6] = 6000 + 6000 + 4500 = 16500$

Simulação

$p[0]{=}10 \;\; p[1]{=}10 \;\; p[2]{=}20 \;\; p[3]{=}30 \;\; p[4]{=}10 \;\; p[5]{=}15 \;\; p[6]{=}30$

	1	2	3	4	5	6	j
1	0	2000	8000	9000			
2		0	6000	8000	9500		
3			0	6000	9000	16500	
4				0	4500	13500	
5					0	4500	
6						0	

$m[3,5]+p[3{-}1]p[5]p[6]+m[5{+}1,6]{=}9000{+}9000{+}0{=}18000$

Simulação

$p[0]=10$ $p[1]=10$ $p[2]=20$ $p[3]=30$ $p[4]=10$ $p[5]=15$ $p[6]=30$

i \ j	1	2	3	4	5	6
1	0	2000	8000	9000	??	
2		0	6000	8000	9500	
3			0	6000	9000	16500
4				0	4500	13500
5					0	4500
6						0

Simulação

$p[0]{=}10 \;\; p[1]{=}10 \;\; p[2]{=}20 \;\; p[3]{=}30 \;\; p[4]{=}10 \;\; p[5]{=}15 \;\; p[6]{=}30$

	1	2	3	4	5	6	j
1	0	2000	8000	9000	11000		
2		0	6000	8000	9500		
3			0	6000	9000	16500	
4				0	4500	13500	
5					0	4500	
6						0	

$m[1,1] + p[1{-}1]p[1]p[5] + m[1{+}1,5]{=}0{+}1500{+}9500{=}11000$

Simulação

$p[0]{=}10 \;\; p[1]{=}10 \;\; p[2]{=}20 \;\; p[3]{=}30 \;\; p[4]{=}10 \;\; p[5]{=}15 \;\; p[6]{=}30$

	1	2	3	4	5	6	j
1	0	2000	8000	9000	11000		
2		0	6000	8000	9500		
3			0	6000	9000	16500	
4				0	4500	13500	
5					0	4500	
6						0	

$$m[1,2] + p[1{-}1]p[2]p[5] + m[2{+}1,5] {=} 2000{+}3000{+}9000{=}14000$$

Simulação

$p[0]{=}10$ $p[1]{=}10$ $p[2]{=}20$ $p[3]{=}30$ $p[4]{=}10$ $p[5]{=}15$ $p[6]{=}30$

	1	2	3	4	5	6	j
1	0	2000	8000	9000	11000		
2		0	6000	8000	9500		
3			0	6000	9000	16500	
4				0	4500	13500	
5					0	4500	
6						0	

$$m[1,3]+p[1{-}1]p[3]p[5]+m[3{+}1,5]{=}8000{+}4500{+}4500{=}17000$$

Simulação

$p[0]{=}10 \;\; p[1]{=}10 \;\; p[2]{=}20 \;\; p[3]{=}30 \;\; p[4]{=}10 \;\; p[5]{=}15 \;\; p[6]{=}30$

	1	2	3	4	5	6	j
1	0	2000	8000	9000	10500		
2		0	6000	8000	9500		
3			0	6000	9000	16500	
4				0	4500	13500	
5					0	4500	
6						0	

$m[1,4] + p[1{-}1]p[4]p[5] + m[4{+}1,5] {=} 9000{+}1500{+}0{=}10500$

Simulação

$p[0]{=}10 \quad p[1]{=}10 \quad p[2]{=}20 \quad p[3]{=}30 \quad p[4]{=}10 \quad p[5]{=}15 \quad p[6]{=}30$

i \ j	1	2	3	4	5	6
1	0	2000	8000	9000	10500	
2		0	6000	8000	9500	??
3			0	6000	9000	16500
4				0	4500	13500
5					0	4500
6						0

Simulação

$p[0]{=}10$ $p[1]{=}10$ $p[2]{=}20$ $p[3]{=}30$ $p[4]{=}10$ $p[5]{=}15$ $p[6]{=}30$

	1	2	3	4	5	6	j
1	0	2000	8000	9000	10500		
2		0	6000	8000	9500	22500	
3			0	6000	9000	16500	
4				0	4500	13500	
5					0	4500	
6						0	

$$m[2,2]+p[2{-}1]p[2]p[6]+m[2{+}1,6]{=}0{+}6000{+}16500{=}22500$$

Simulação

$p[0]{=}10$ $p[1]{=}10$ $p[2]{=}20$ $p[3]{=}30$ $p[4]{=}10$ $p[5]{=}15$ $p[6]{=}30$

	1	2	3	4	5	6	j
1	0	2000	8000	9000	10500		
2		0	6000	8000	9500	22500	
3			0	6000	9000	16500	
4				0	4500	13500	
5					0	4500	
6						0	

$$m[2,3]+p[2{-}1]p[3]p[6]+m[3{+}1,6]{=}6000{+}9000{+}13500{=}28500$$

Simulação

$p[0]{=}10 \;\; p[1]{=}10 \;\; p[2]{=}20 \;\; p[3]{=}30 \;\; p[4]{=}10 \;\; p[5]{=}15 \;\; p[6]{=}30$

	1	2	3	4	5	6	j
1	0	2000	8000	9000	10500		
2		0	6000	8000	9500	15500	
3			0	6000	9000	16500	
4				0	4500	13500	
5					0	4500	
6						0	

$m[2,4]+p[2{-}1]p[4]p[6]+m[4{+}1,6]{=}8000{+}3000{+}4500{=}15500$

Simulação

$p[0]{=}10 \;\; p[1]{=}10 \;\; p[2]{=}20 \;\; p[3]{=}30 \;\; p[4]{=}10 \;\; p[5]{=}15 \;\; p[6]{=}30$

	1	2	3	4	5	6	j
1	0	2000	8000	9000	10500		
2		0	6000	8000	9500	14000	
3			0	6000	9000	16500	
4				0	4500	13500	
5					0	4500	
6						0	

$$m[2,5] + p[2{-}1]p[5]p[6] + m[5{+}1,6] = 9500 + 4500 + 0 = 14000$$

Simulação

$p[0]=10 \quad p[1]=10 \quad p[2]=20 \quad p[3]=30 \quad p[4]=10 \quad p[5]=15 \quad p[6]=30$

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6
1	0	2000	8000	9000	10500	??
2		0	6000	8000	9500	14000
3			0	6000	9000	16500
4				0	4500	13500
5					0	4500
6						0

Simulação

$p[0]{=}10 \;\; p[1]{=}10 \;\; p[2]{=}20 \;\; p[3]{=}30 \;\; p[4]{=}10 \;\; p[5]{=}15 \;\; p[6]{=}30$

	1	2	3	4	5	6	j
1	0	2000	8000	9000	10500	17000	
2		0	6000	8000	9500	14000	
3			0	6000	9000	16500	
4				0	4500	13500	
5					0	4500	
6						0	

$m[1,1] + p[1{-}1]p[1]p[6] + m[1{+}1,6]{=}0{+}3000{+}14000{=}17000$

Simulação

$p[0]{=}10 \;\; p[1]{=}10 \;\; p[2]{=}20 \;\; p[3]{=}30 \;\; p[4]{=}10 \;\; p[5]{=}15 \;\; p[6]{=}30$

	1	2	3	4	5	6	j
1	0	2000	8000	9000	10500	17000	
2		0	6000	8000	9500	14000	
3			0	6000	9000	16500	
4				0	4500	13500	
5					0	4500	
6						0	

$m[1,2] + p[1{-}1]p[2]p[6] + m[2{+}1,6] {=} 2000{+}6000{+}16500{=}24500$

Simulação

$p[0]{=}10 \;\; p[1]{=}10 \;\; p[2]{=}20 \;\; p[3]{=}30 \;\; p[4]{=}10 \;\; p[5]{=}15 \;\; p[6]{=}30$

	1	2	3	4	5	6	j
1	0	2000	8000	9000	10500	17000	
2		0	6000	8000	9500	14000	
3			0	6000	9000	16500	
4				0	4500	13500	
5					0	4500	
6						0	

$m[1,3] + p[1{-}1]p[3]p[6] + m[3{+}1,6] = 8000 + 9000 + 13500 = 30500$

Simulação

$p[0]{=}10 \quad p[1]{=}10 \quad p[2]{=}20 \quad p[3]{=}30 \quad p[4]{=}10 \quad p[5]{=}15 \quad p[6]{=}30$

	1	2	3	4	5	6	j
1	0	2000	8000	9000	10500	16500	
2		0	6000	8000	9500	14000	
3			0	6000	9000	16500	
4				0	4500	13500	
5					0	4500	
6						0	

$m[1,4] + p[1{-}1]p[4]p[6] + m[4{+}1,6] = 9000 + 3000 + 4500 = 16500$

Simulação

$p[0]{=}10 \;\; p[1]{=}10 \;\; p[2]{=}20 \;\; p[3]{=}30 \;\; p[4]{=}10 \;\; p[5]{=}15 \;\; p[6]{=}30$

	1	2	3	4	5	6	j
1	0	2000	8000	9000	10500	15000	
2		0	6000	8000	9500	14000	
3			0	6000	9000	16500	
4				0	4500	13500	
5					0	4500	
6						0	

$$m[1,5]+p[1{-}1]p[5]p[6]+m[5{+}1,6]{=}10500{+}4500{+}0{=}15000$$

Simulação

$p[0]{=}10$ $p[1]{=}10$ $p[2]{=}20$ $p[3]{=}30$ $p[4]{=}10$ $p[5]{=}15$ $p[6]{=}30$

i \ j	1	2	3	4	5	6
1	0	2000	8000	9000	10500	15000
2		0	6000	8000	9500	14000
3			0	6000	9000	16500
4				0	4500	13500
5					0	4500
6						0

Algoritmo de programação dinâmica

Recebe $p[0\,..\,n]$ e devolve $m[1,n]$.

```
MATRIX-CHAIN-ORDER (p, n)
para i ← 1 até n faça
    m[i,i] ← 0
para ℓ ← 2 até n faça
    para i ← 1 até n − ℓ + 1 faça
        j ← i + ℓ − 1
        m[i,j] ← ∞
        para k ← i até j − 1 faça
            q ← m[i,k] + p[i − 1]p[k]p[j] + m[k+1,j]
            se q < m[i,j]
                então m[i,j] ← q
devolva m[1,n]
```

Correção e consumo de tempo

Linhas 3–10: tratam subcadeias $A_i \cdots A_j$ de comprimento ℓ

Correção e consumo de tempo

Linhas 3–10: tratam subcadeias $A_i \cdots A_j$ de comprimento ℓ

Consumo de tempo: ???

Correção e consumo de tempo

Linhas 3–10: tratam subcadeias $A_i \cdots A_j$ de comprimento ℓ

Consumo de tempo: $O(n^3)$ (três loops encaixados)

Correção e consumo de tempo

Linhas 3–10: tratam subcadeias $A_i \cdots A_j$ de comprimento ℓ

Consumo de tempo: $\mathrm{O}(n^3)$ (três loops encaixados)

Curioso verificar que consumo de tempo é $\Omega(n^3)$:

Número de execuções da linha 8:

Correção e consumo de tempo

Linhas 3–10: tratam subcadeias $A_i \cdots A_j$ de comprimento ℓ

Consumo de tempo: $O(n^3)$ (três loops encaixados)

Curioso verificar que consumo de tempo é $\Omega(n^3)$:

Número de execuções da linha 8:

ℓ	i	execs linha 8
2	$1,\ldots,n-1$	$(n-1)\cdot 1$
3	$1,\ldots,n-2$	$(n-2)\cdot 2$
4	$1,\ldots,n-3$	$(n-3)\cdot 3$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$n-1$	$1,2$	$2\cdot(n-2)$
n	1	$1\cdot(n-1)$
	total	$\sum_{h=1}^{n-1} h(n-h)$

Consumo de tempo

Para $n \geq 6$, $\sum_{h=1}^{n-1} h(n-h) \ =$

$$
\begin{aligned}
&= \quad n \sum_{h=1}^{n-1} h \ - \ \sum_{h=1}^{n-1} h^2 \\
&= \quad n \tfrac{1}{2} n(n-1) - \tfrac{1}{6}(n-1)n(2n-1) \qquad \text{(CLRS p.1060)} \\
&\geq \quad \tfrac{1}{2} n^2 (n-1) - \tfrac{1}{6} 2n^3 \\
&\geq \quad \tfrac{1}{2} n^2 \tfrac{5n}{6} - \tfrac{1}{3} n^3 \\
&= \quad \tfrac{5}{12} n^3 - \tfrac{1}{3} n^3 \\
&= \quad \tfrac{1}{12} n^3 .
\end{aligned}
$$

Consumo de tempo é $\Omega(n^3)$

Conclusão

O consumo de tempo do algoritmo MATRIX-CHAIN-ORDER é $\Theta(n^3)$.

Versão recursiva eficiente

MEMOIZED-MATRIX-CHAIN-ORDER (p, n)

```
para i ← 1 até n faça
    para j ← 1 até n faça
        m[i, j] ← ∞
devolva LOOKUP-CHAIN (p, 1, n)
```

Versão recursiva eficiente

```
LOOKUP-CHAIN (p, i, j)
se m[i,j] < ∞
    então devolva m[i,j]
se i = j
    então m[i,j] ← 0
    senão para k ← i até j − 1 faça
              q ← LOOKUP-CHAIN (p, i, k)
                + p[i−1]p[k]p[j]
                + LOOKUP-CHAIN (p, k+1, j)
              se q < m[i,j]
                  então m[i,j] ← q
devolva m[i,j]
```

Ingredientes de programação dinâmica

- Subestrutura ótima: soluções ótimas contém soluções ótimas de subproblemas.
- Subestrutura: decomponha o problema em subproblemas menores e, com sorte, mais simples.
- *Bottom-up*: combine as soluções dos problemas menores para obter soluções dos maiores.
- Tabela: armazene as soluções dos subproblemas em uma tabela, pois soluções dos subproblemas são consultadas várias vezes.
- Número de subproblemas: para a eficiência do algoritmo é importante que o número de subproblemas resolvidos seja 'pequeno'.
- Memoized: versão *top-down*, recursão com tabela.

Exercício

O algoritmo MATRIX-CHAIN-ORDER determina o número mínimo de multiplicações escalares necessário para calcular produto $A_1 A_2 \cdots A_n$.

Na aula, mencionamos uma maneira de obter uma parentização ótima a partir dos cálculos feitos, usando para isso um dado a mais que podemos guardar no decorrer do algoritmo.

Faça os ajustes sugeridos na aula, de modo a guardar esse dado extra, e devolvê-lo junto com o valor $m[1, n]$.

Faça uma rotina que recebe a informação extra armazenada pelo algoritmo acima e imprime uma parentização ótima das matrizes $A_1 A_2 \cdots A_n$.

Exercícios

Exercício 13.A [CLRS 15.2-1]
Encontre a maneira ótima de fazer a multiplicação iterada das matrizes cujas dimensões são $(5, 10, 3, 12, 5, 50, 6)$.

Exercício 13.B [CLRS 15.2-5]
Mostre que são necessários exatamente $n-1$ pares de parênteses para especificar exatamente a ordem de multiplicação de $A_1 \cdot A_2 \cdots A_n$.

Exercício 13.C [CLRS 15.3-2]
Desenhe a árvore de recursão para o algoritmo MERGESORT aplicado a um vetor de 16 elementos. Por que a técnica de programação dinâmica não é capaz de acelerar o algoritmo?

Mais exercícios

Exercício 13.D [CLRS 15.3-5 expandido]
Considere o seguinte algoritmo para determinar a ordem de multiplicação de uma cadeia de matrizes $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de dimensões $p_0, p_1, \ldots, p_n$: primeiro, escolha k que minimize p_k; depois, determine recursivamente as ordens de multiplicação de $A_1, \ldots, A_k$ e $A_{k+1}, \ldots, A_n$. Esse algoritmo produz uma ordem que minimiza o número total de multiplicações escalares? E se k for escolhido de modo a maximizar p_k? E se k for escolhido de modo a minimizar p_k?

Exercício 13.E
Prove que o número de execuções da linha 9 em MATRIX-CHAIN-ORDER é $\mathrm{O}(n^3)$.

Mais programação dinâmica

CLRS 15.5

= "recursão–com–tabela"

= transformação inteligente de recursão em iteração

Buscas em um conjunto conhecido

Considere um inteiro n e um vetor $v[1\,..\,n]$ de `tipoOrd`.

Problema: Dado $v[1\,..\,n]$ e uma sequência de k elementos do `tipoOrd`, decidir se cada elemento está ou não em v.

Buscas em um conjunto conhecido

Considere um inteiro n e um vetor $v[1\,..\,n]$ de `tipoOrd`.

Problema: Dado $v[1\,..\,n]$ e uma sequência de k elementos do `tipoOrd`, decidir se cada elemento está ou não em v.

Se k é grande, como devemos armazenar o v?

Buscas em um conjunto conhecido

Considere um inteiro n e um vetor $v[1\,..\,n]$ de `tipoOrd`.

Problema: Dado $v[1\,..\,n]$ e uma sequência de k elementos do `tipoOrd`, decidir se cada elemento está ou não em v.

Se k é grande, como devemos armazenar o v?

E se v armazena um conjunto bem conhecido,
como por exemplo as palavras de uma língua?
(A ser usado por um tradutor, ou um speller.)

Buscas em um conjunto conhecido

Considere um inteiro n e um vetor $v[1\,..\,n]$ de `tipoOrd`.

Problema: Dado $v[1\,..\,n]$ e uma sequência de k elementos do `tipoOrd`, decidir se cada elemento está ou não em v.

Se k é grande, como devemos armazenar o v?

E se v armazena um conjunto bem conhecido,
como por exemplo as palavras de uma língua?
(A ser usado por um tradutor, ou um speller.)

Podemos ordenar v e aplicar busca binária.

Podemos fazer algo melhor?

Buscas em conjunto conhecido

Dadas estimativas do número de acessos a cada elemento de $v[1\,..\,n]$, qual é a melhor estrutura de dados para v?

Buscas em conjunto conhecido

Dadas estimativas do número de acessos a cada elemento de $v[1\,..\,n]$, qual é a melhor estrutura de dados para v?

Árvore de busca binária (ABB)?

Buscas em conjunto conhecido

Dadas estimativas do número de acessos a cada elemento de $v[1\,..\,n]$, qual é a melhor estrutura de dados para v?

Árvore de busca binária (ABB)?

Exemplo: $n = 3$ e $e_1 = 10$, $e_2 = 20$, $e_3 = 40$.

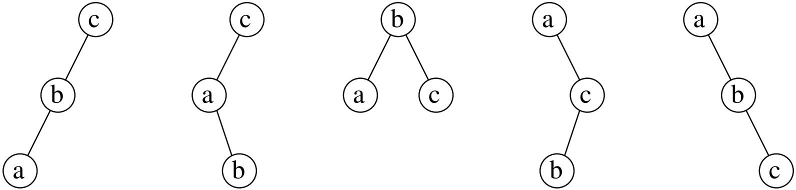
Buscas em conjunto conhecido

Dadas estimativas do número de acessos a cada elemento de $v[1..n]$, qual é a melhor estrutura de dados para v?

Árvore de busca binária (ABB)?

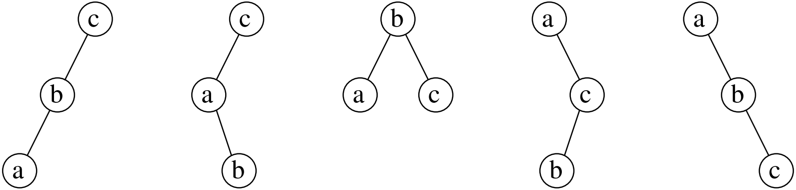
Exemplo: $n = 3$ e $e_1 = 10$, $e_2 = 20$, $e_3 = 40$.

Qual a melhor das ABBs?



Exemplo

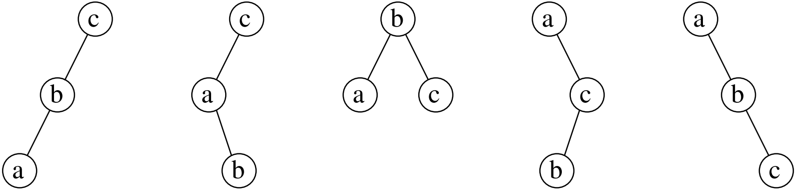
Exemplo: $n = 3$ e $e_1 = 10$, $e_2 = 20$, $e_3 = 40$.



Qual a melhor das ABBs?

Exemplo

Exemplo: $n = 3$ e $e_1 = 10$, $e_2 = 20$, $e_3 = 40$.

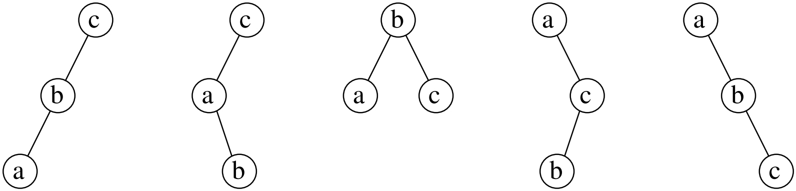


Número esperado de comparações:

- $10 \cdot 3 + 20 \cdot 2 + 40 \cdot 1 = 110$
- $10 \cdot 2 + 20 \cdot 3 + 40 \cdot 1 = 120$
- $10 \cdot 2 + 20 \cdot 1 + 40 \cdot 2 = 120$
- $10 \cdot 1 + 20 \cdot 3 + 40 \cdot 2 = 150$
- $10 \cdot 1 + 20 \cdot 2 + 40 \cdot 3 = 170$

Exemplo

Exemplo: $n = 3$ e $e_1 = 10$, $e_2 = 20$, $e_3 = 40$.



Número esperado de comparações:

- $10 \cdot 3 + 20 \cdot 2 + 40 \cdot 1 = 110$ $\longleftarrow$ ABB ótima
- $10 \cdot 2 + 20 \cdot 3 + 40 \cdot 1 = 120$
- $10 \cdot 2 + 20 \cdot 1 + 40 \cdot 2 = 120$
- $10 \cdot 1 + 20 \cdot 3 + 40 \cdot 2 = 150$
- $10 \cdot 1 + 20 \cdot 2 + 40 \cdot 3 = 170$

Árvore de busca ótima

Considere um vetor $e[1\,..\,n]$ de `tipoOrd` com uma estimativa do número de acessos a cada elemento de $\{1, \ldots, n\}$.

Árvore de busca ótima

Considere um vetor $e[1\,..\,n]$ de `tipoOrd` com uma estimativa do número de acessos a cada elemento de $\{1,\ldots,n\}$.

Uma ABB ótima com respeito ao vetor e é uma ABB para o conjunto $\{1,\ldots,n\}$ que minimiza o número

$$\sum_{i=1}^{n} h_i\, e_i,$$

onde h_i é o número de nós no caminho de i até a raiz da árvore.

Árvore de busca ótima

Considere um vetor $e[1\,..\,n]$ de `tipoOrd` com uma estimativa do número de acessos a cada elemento de $\{1, \dots, n\}$.

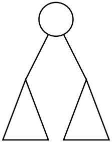
Uma ABB ótima com respeito ao vetor e é uma ABB para o conjunto $\{1, \dots, n\}$ que minimiza o número

$$\sum_{i=1}^{n} h_i \, e_i,$$

onde h_i é o número de nós no caminho de i até a raiz da árvore.

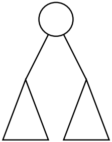
Problema (ABB Ótima): Dado $e[1\,..\,n]$, encontrar uma árvore de busca binária ótima com respeito a e.

Subestrutura ótima



Subárvores esquerda e direita de uma ABB ótima são ABBs ótimas.

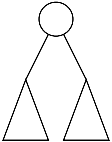
Subestrutura ótima



Subárvores esquerda e direita de uma ABB ótima são ABBs ótimas.

Resta determinar a raiz da ABB ótima.

Subestrutura ótima

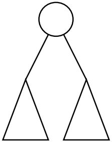


Subárvores esquerda e direita de uma ABB ótima
são ABBs ótimas.

Resta determinar a raiz da ABB ótima.

$c[i,j]$: custo min de uma ABB para $e[i\,..\,j]$
$s[i,j]$: soma dos acessos em $e[i\,..\,j]$

Subestrutura ótima



Subárvores esquerda e direita de uma ABB ótima
são ABBs ótimas.

Resta determinar a raiz da ABB ótima.

$c[i,j]$: custo min de uma ABB para $e[i \mathinner{..} j]$
$s[i,j]$: soma dos acessos em $e[i \mathinner{..} j]$

$$c[i,j] = \begin{cases} 0 & \text{se } i > j \\ \min_{i \le k \le j}\{c[i,k-1] + c[k+1,j] + s[i,j]\} & \text{se } i \le j \end{cases}$$

Custo de uma ABB ótima

$c[i,j]$: custo min de uma ABB para $e[i\,..\,j]$

$s[j]$: soma dos acessos em $e[1\,..\,j]$
$s[j] - s[i{-}1]$: soma dos acessos em $e[i\,..\,j]$

$$c[i,j] = \begin{cases} 0 & \text{se } i > j \\ \min_{i \le k \le j}\{c[i,k{-}1] + c[k{+}1,j]\} + s[j] - s[i{-}1] & \text{se } i \le j \end{cases}$$

Custo de uma ABB ótima

$c[i,j]$: custo min de uma ABB para $e[i\,..\,j]$

$s[j]$: soma dos acessos em $e[1\,..\,j]$
$s[j]-s[i{-}1]$: soma dos acessos em $e[i\,..\,j]$

$$c[i,j] = \begin{cases} 0 & \text{se } i > j \\ \min_{i\le k\le j}\{c[i,k{-}1]+c[k{+}1,j]\}+s[j]-s[i{-}1] & \text{se } i \le j \end{cases}$$

Para calcular s:

```
s[0] = 0
para i ← 1 até n faça
    s[i] ← s[i−1] + e[i]
```

Custo de uma ABB ótima

$c[i,j]$: custo min de uma ABB para $e[i\,..\,j]$

$s[j]$: soma dos acessos em $e[1\,..\,j]$
$s[j]-s[i{-}1]$: soma dos acessos em $e[i\,..\,j]$

$$c[i,j] = \begin{cases} 0 & \text{se } i > j \\ \min_{i \le k \le j}\{c[i,k{-}1] + c[k{+}1,j]\} + s[j] - s[i{-}1] & \text{se } i \le j \end{cases}$$

Como preencher a matriz c?
Em que ordem?

Custo de uma ABB ótima

$c[i,j]$: custo min de uma ABB para $e[i \mathinner{..} j]$

$s[j]$: soma dos acessos em $e[1 \mathinner{..} j]$
$s[j] - s[i-1]$: soma dos acessos em $e[i \mathinner{..} j]$

$$c[i,j] = \begin{cases} 0 & \text{se } i > j \\ \min_{i \le k \le j}\{c[i,k-1] + c[k+1,j]\} + s[j] - s[i-1] & \text{se } i \le j \end{cases}$$

Como preencher a matriz c?
Em que ordem?

Como no problema da parentização! Pelas diagonais!

Programação dinâmica

	0	1	2	3	4	5	6	7	j
1	0								
2		0	$\star$	$\star$	$\star$	??			
3			0			$\star$			
4				0		$\star$			
5					0	$\star$			
6						0			
7							0		
i								0	

Simulação

$e[1]{=}10 \quad e[2]{=}20 \quad e[3]{=}30 \quad e[4]{=}15 \quad e[5]{=}30$

Simulação

$e[1]=10 \quad e[2]=20 \quad e[3]=30 \quad e[4]=15 \quad e[5]=30$

	0	1	2	3	4	5	j
1	0	??					
2		0					
3			0				
4				0			
5					0		
6						0	
i							

Simulação

$e[1]{=}10 \quad e[2]{=}20 \quad e[3]{=}30 \quad e[4]{=}15 \quad e[5]{=}30$

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5
1	0	10				
2		0				
3			0			
4				0		
5					0	
6						0

$c[1, 1{-}1] + e[1] + c[1{+}1, 1] = 0{+}10{+}0 = 10$

Simulação

$e[1]=10 \quad e[2]=20 \quad e[3]=30 \quad e[4]=15 \quad e[5]=30$

i \ j	0	1	2	3	4	5
1	0	10				
2		0	??			
3			0			
4				0		
5					0	
6						0

Simulação

$e[1]{=}10 \quad e[2]{=}20 \quad e[3]{=}30 \quad e[4]{=}15 \quad e[5]{=}30$

i \ j	0	1	2	3	4	5
1	0	10				
2		0	20			
3			0			
4				0		
5					0	
6						0

$$c[2,2{-}1] + e[2] + c[2{+}1,2] = 0{+}20{+}0 = 20$$

Simulação

$e[1]{=}10 \quad e[2]{=}20 \quad e[3]{=}30 \quad e[4]{=}15 \quad e[5]{=}30$

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5
1	0	10				
2		0	20			
3			0	??		
4				0		
5					0	
6						0

Simulação

$e[1]{=}10 \quad e[2]{=}20 \quad e[3]{=}30 \quad e[4]{=}15 \quad e[5]{=}30$

	0	1	2	3	4	5	j
1	0	10					
2		0	20				
3			0	30			
4				0			
5					0		
6						0	
i							

$c[3, 3{-}1] + e[3] + c[3{+}1, 3] = 0{+}30{+}0 = 30$

Simulação

$e[1]=10$ $e[2]=20$ $e[3]=30$ $e[4]=15$ $e[5]=30$

	0	1	2	3	4	5	j
1	0	10					
2		0	20				
3			0	30			
4				0	??		
5					0		
6						0	
i							

Simulação

$e[1]{=}10 \quad e[2]{=}20 \quad e[3]{=}30 \quad e[4]{=}15 \quad e[5]{=}30$

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5
1	0	10				
2		0	20			
3			0	30		
4				0	15	
5					0	
6						0

$c[4,4{+}1] + e[4] + c[4{+}1,4] = 0{+}15{+}0 = 15$

Simulação

$e[1]=10 \quad e[2]=20 \quad e[3]=30 \quad e[4]=15 \quad e[5]=30$

i \ j	0	1	2	3	4	5
1	0	10				
2		0	20			
3			0	30		
4				0	15	
5					0	??
6						0

Simulação

$e[1]{=}10 \quad e[2]{=}20 \quad e[3]{=}30 \quad e[4]{=}15 \quad e[5]{=}30$

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5
1	0	10				
2		0	20			
3			0	30		
4				0	15	
5					0	30
6						0

$c[5,5{+}1] + e[5] + c[5{+}1,5] = 0{+}30{+}0 = 30$

Simulação

e[1]=10   e[2]=20   e[3]=30   e[4]=15   e[5]=30

i \ j	0	1	2	3	4	5
1	0	10	??			
2		0	20			
3			0	30		
4				0	15	
5					0	30
6						0

Simulação

$e[1]=10 \quad e[2]=20 \quad e[3]=30 \quad e[4]=15 \quad e[5]=30$

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5
1	0	10	50			
2		0	20			
3			0	30		
4				0	15	
5					0	30
6						0

$$c[1,1-1]+(e[1]+e[2])+c[1+1,2]=0+30+20=50$$

Simulação

$e[1]{=}10 \quad e[2]{=}20 \quad e[3]{=}30 \quad e[4]{=}15 \quad e[5]{=}30$

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5
1	0	10	40			
2		0	20			
3			0	30		
4				0	15	
5					0	30
6						0

$$c[1,2-1]+(e[1]+e[2])+c[2+1,2] = 10+30+0 = 40$$

Simulação

$e[1]{=}10 \quad e[2]{=}20 \quad e[3]{=}30 \quad e[4]{=}15 \quad e[5]{=}30$

i \ j	0	1	2	3	4	5
1	0	10	40			
2		0	20	??		
3			0	30		
4				0	15	
5					0	30
6						0

Simulação

$e[1]{=}10 \quad e[2]{=}20 \quad e[3]{=}30 \quad e[4]{=}15 \quad e[5]{=}30$

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5
1	0	10	40			
2		0	20	80		
3			0	30		
4				0	15	
5					0	30
6						0

$c[2,2{-}1] + (e[2] + e[3]) + c[2{+}1,3] = 0{+}50{+}30 = 80$

Simulação

$e[1]=10 \quad e[2]=20 \quad e[3]=30 \quad e[4]=15 \quad e[5]=30$

	0	1	2	3	4	5	j
1	0	10	40				
2		0	20	70			
3			0	30			
4				0	15		
5					0	30	
6						0	
i							

$$c[2,3-1]+(e[2]+e[3])+c[3+1,3] = 20+50+0 = 70$$

Simulação

$e[1]{=}10 \quad e[2]{=}20 \quad e[3]{=}30 \quad e[4]{=}15 \quad e[5]{=}30$

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5
1	0	10	40			
2		0	20	70		
3			0	30	??	
4				0	15	
5					0	30
6						0

Simulação

$e[1]=10 \quad e[2]=20 \quad e[3]=30 \quad e[4]=15 \quad e[5]=30$

i \ j	0	1	2	3	4	5
1	0	10	40			
2		0	20	70		
3			0	30	60	
4				0	15	
5					0	30
6						0

$$c[3,3-1] + (e[3] + e[4]) + c[3+1,4] = 0+45+15 = 60$$

Simulação

$e[1]{=}10 \quad e[2]{=}20 \quad e[3]{=}30 \quad e[4]{=}15 \quad e[5]{=}30$

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5
1	0	10	40			
2		0	20	70		
3			0	30	60	
4				0	15	
5					0	30
6						0

$c[3,4{-}1] + (e[3] + e[4]) + c[4{+}1,4] = 30{+}45{+}0 = 75$

Simulação

$e[1]=10 \quad e[2]=20 \quad e[3]=30 \quad e[4]=15 \quad e[5]=30$

	0	1	2	3	4	5	j
1	0	10	40				
2		0	20	70			
3			0	30	60		
4				0	15	??	
5					0	30	
6						0	
i							

Simulação

$e[1]{=}10 \quad e[2]{=}20 \quad e[3]{=}30 \quad e[4]{=}15 \quad e[5]{=}30$

i \ j	0	1	2	3	4	5
1	0	10	40			
2		0	20	70		
3			0	30	60	
4				0	15	75
5					0	30
6						0

$$c[4,4{-}1] + (e[4] + e[5]) + c[4{+}1,5] = 0{+}45{+}30{=}75$$

Simulação

$e[1]{=}10 \quad e[2]{=}20 \quad e[3]{=}30 \quad e[4]{=}15 \quad e[5]{=}30$

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5
1	0	10	40			
2		0	20	70		
3			0	30	60	
4				0	15	60
5					0	30
6						0

$$c[4,5{-}1] + (e[4]+e[5]) + c[5{+}1,5] = 15{+}45{+}0 = 60$$

Simulação

$e[1]{=}10 \quad e[2]{=}20 \quad e[3]{=}30 \quad e[4]{=}15 \quad e[5]{=}30$

i \ j	0	1	2	3	4	5
1	0	10	40	??		
2		0	20	70		
3			0	30	60	
4				0	15	60
5					0	30
6						0

Simulação

$e[1]{=}10 \quad e[2]{=}20 \quad e[3]{=}30 \quad e[4]{=}15 \quad e[5]{=}30$

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5
1	0	10	40	130		
2		0	20	70		
3			0	30	60	
4				0	15	60
5					0	30
6						0

$$c[1,1{-}1] + (e[1] + e[2] + e[3]) + c[1{+}1,3] = 0{+}60{+}70 = 130$$

Simulação

$e[1]{=}10 \quad e[2]{=}20 \quad e[3]{=}30 \quad e[4]{=}15 \quad e[5]{=}30$

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5
1	0	10	40	100		
2		0	20	70		
3			0	30	60	
4				0	15	60
5					0	30
6						0

$$c[1,2{-}1] + (e[1]) + e[2] + e[3]) + c[2{+}1,3] = 10{+}60{+}30 = 100$$

Simulação

$e[1]{=}10 \quad e[2]{=}20 \quad e[3]{=}30 \quad e[4]{=}15 \quad e[5]{=}30$

	0	1	2	3	4	5	j
1	0	10	40	100			
2		0	20	70			
3			0	30	60		
4				0	15	60	
5					0	30	
6						0	
i							

$$c[1, 3{-}1] + (e[1] + e[2] + e[3]) + c[3{+}1, 3] = 40{+}60{+}0 = 100$$

Simulação

$e[1]{=}10$ $e[2]{=}20$ $e[3]{=}30$ $e[4]{=}15$ $e[5]{=}30$

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5
1	0	10	40	100		
2		0	20	70	??	
3			0	30	60	
4				0	15	60
5					0	30
6						0

Simulação

$e[1]{=}10 \quad e[2]{=}20 \quad e[3]{=}30 \quad e[4]{=}15 \quad e[5]{=}30$

i \ j	0	1	2	3	4	5
1	0	10	40	100		
2		0	20	70	125	
3			0	30	60	
4				0	15	60
5					0	30
6						0

$$c[2,2{-}1] + (e[2]+e[3]+e[4]) + c[2{+}1,4] = 0{+}65{+}60 = 125$$

Simulação

e[1]=10 e[2]=20 e[3]=30 e[4]=15 e[5]=30

i \ j	0	1	2	3	4	5
1	0	10	40	100		
2		0	20	70	100	
3			0	30	60	
4				0	15	60
5					0	30
6						0

$$c[2,3-1]+(e[2]+e[3]+e[4])+c[3+1,4] = 20+65+15 = 100$$

Simulação

$e[1]{=}10 \quad e[2]{=}20 \quad e[3]{=}30 \quad e[4]{=}15 \quad e[5]{=}30$

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5
1	0	10	40	100		
2		0	20	70	100	
3			0	30	60	
4				0	15	60
5					0	30
6						0

$$c[2,4{-}1] + (e[2]+e[3]+e[4]) + c[4{+}1,4] = 70{+}65{+}0 = 135$$

Simulação

$e[1]=10 \quad e[2]=20 \quad e[3]=30 \quad e[4]=15 \quad e[5]=30$

	0	1	2	3	4	5	j
1	0	10	40	100			
2		0	20	70	100		
3			0	30	60	??	
4				0	15	60	
5					0	30	
6						0	
i							

Simulação

$e[1]{=}10 \quad e[2]{=}20 \quad e[3]{=}30 \quad e[4]{=}15 \quad e[5]{=}30$

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5
1	0	10	40	100		
2		0	20	70	100	
3			0	30	60	135
4				0	15	60
5					0	30
6						0

$$c[3,3{-}1] + (e[3]+e[4]+e[5]) + c[3{+}1,5] = 0{+}75{+}60 = 135$$

Simulação

$e[1]{=}10 \quad e[2]{=}20 \quad e[3]{=}30 \quad e[4]{=}15 \quad e[5]{=}30$

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5
1	0	10	40	100		
2		0	20	70	100	
3			0	30	60	135
4				0	15	60
5					0	30
6						0

$$c[3,4{-}1] + (e[3]+e[4]+e[5]) + c[4{+}1,5] = 30{+}75{+}30 = 135$$

Simulação

$e[1]{=}10 \quad e[2]{=}20 \quad e[3]{=}30 \quad e[4]{=}15 \quad e[5]{=}30$

i \ j	0	1	2	3	4	5
1	0	10	40	100		
2		0	20	70	100	
3			0	30	60	135
4				0	15	60
5					0	30
6						0

$$c[3,5{-}1] + (e[3]+e[4]+e[5]) + c[5{+}1,5] = 60{+}75{+}0 = 135$$

Simulação

$e[1]=10 \quad e[2]=20 \quad e[3]=30 \quad e[4]=15 \quad e[5]=30$

i \ j	0	1	2	3	4	5
1	0	10	40	100		
2		0	20	70	100	
3			0	30	60	135
4				0	15	60
5					0	30
6						0

Exercício: Preencha o que falta!

Árvore de busca ótima

```
ABB-ÓTIMA (e, n)
s[0] = 0
para i ← 1 até n faça
    s[i] ← s[i−1] + e[i]
para i ← 1 até n+1 faça
    c[i, i−1] ← 0
para ℓ ← 1 até n faça
    para i ← 1 até n−ℓ+1 faça
        j ← i+ℓ−1
        q ← c[i+1, j]
        para k ← i+1 até j faça
            se c[i, k−1] + c[k+1, j] < q
            então q ← c[i, k−1] + c[k+1, j]
        c[i, j] ← q + s[j] − s[i−1]
devolva c[1, n]
```

Árvore de busca ótima

Exercício: Como fazer para obter uma ABB ótima e não apenas o seu custo? Complete o serviço!