

Grafos e BFS

CLRS 22 Elementary Graph Algorithms

CLRS 22.1 e 22.2

Busca em largura

É uma **moldura** de algoritmos que vão fazendo seu serviço enquanto percorrem o grafo.

Busca em largura

É uma **moldura** de algoritmos que vão fazendo seu serviço enquanto percorrem o grafo.

Inicialização

BFS (G, s)

- 1 para cada $u \in G.V \setminus \{s\}$ faça
- 2 $u.cor \leftarrow$ branco
- 3 $u.d \leftarrow \infty$
- 4 $u.\pi \leftarrow$ nil
- 5 $Q \leftarrow \emptyset$ ▷ fila dos vértices descobertos
- 6 $s.cor \leftarrow$ cinzento
- 7 $s.d \leftarrow 0$
- 8 $s.\pi \leftarrow$ nil
- 9 $Q.INSIRA(s)$

Busca em largura

BFS (G, s)

- 1 para cada $u \in G.V \setminus \{s\}$ faça
- 2 $u.cor \leftarrow$ branco $u.d \leftarrow \infty$ $u.\pi \leftarrow$ nil
- 3 $Q \leftarrow \emptyset$ \triangleright fila dos vértices descobertos
- 4 $s.cor \leftarrow$ cinzento $s.d \leftarrow 0$ $s.\pi \leftarrow$ nil
- 5 $Q.INSIRA(s)$

Busca em largura

BFS (G, s)

- 1 para cada $u \in G.V \setminus \{s\}$ faça
- 2 $u.cor \leftarrow$ branco $u.d \leftarrow \infty$ $u.\pi \leftarrow$ nil
- 3 $Q \leftarrow \emptyset$ \triangleright fila dos vértices descobertos
- 4 $s.cor \leftarrow$ cinzento $s.d \leftarrow 0$ $s.\pi \leftarrow$ nil
- 5 $Q.INSIRA(s)$

- 6 enquanto $Q \neq \emptyset$ faça
- 7 $u \leftarrow Q.REMOVA()$
- 8 para cada $v \in u.Estrela$ faça
- 9 se $v.cor =$ branco
- 10 então $v.cor \leftarrow$ cinzento
- 11 $v.d \leftarrow u.d + 1$
- 12 $v.\pi \leftarrow u$
- 13 $Q.INSIRA(v)$
- 14 $u.cor \leftarrow$ preto

Descrição

Vértice branco: ainda não descoberto

Vértice cinzento: descoberto mas não processado
(são os vértices em Q)

Vértice preto: processado

Descrição

Vértice branco: ainda não descoberto

Vértice cinzento: descoberto mas não processado
(são os vértices em Q)

Vértice preto: processado

BFS devolve em π uma **árvore BF** enraizada em s .

$u.\pi$: predecessor ou pai de u na árvore BF

Descrição

Vértice branco: ainda não descoberto

Vértice cinzento: descoberto mas não processado
(são os vértices em Q)

Vértice preto: processado

BFS devolve em π uma **árvore BF** enraizada em s .

$u.\pi$: predecessor ou pai de u na árvore BF

$u.d$: distância de s a u em G

BFS descobre todos os vértices à distância k
antes de descobrir qualquer um à distância $k + 1$

Consumo de tempo

Cada vértice é descoberto uma única vez, pois é branco e, ao ser descoberto, passa a ser cinzento, e depois preto.

Consumo de tempo

Cada vértice é descoberto uma única vez, pois é branco e, ao ser descoberto, passa a ser cinzento, e depois preto.

A estrela de cada vértice descoberto é percorrida uma única vez, quando o vértice sai de Q .

Consumo de tempo

Cada vértice é descoberto uma única vez, pois é branco e, ao ser descoberto, passa a ser cinzento, e depois preto.

A estrela de cada vértice descoberto é percorrida uma única vez, quando o vértice sai de Q .

Logo, com listas de adjacência, o consumo de tempo é $O(n + m)$, pois a inicialização custa $\Theta(n)$ e a soma do tamanho das listas de adjacências percorridas é $O(m)$.

Consumo de tempo

Cada vértice é descoberto uma única vez, pois é branco e, ao ser descoberto, passa a ser cinzento, e depois preto.

A estrela de cada vértice descoberto é percorrida uma única vez, quando o vértice sai de Q .

Logo, com listas de adjacência, o consumo de tempo é $O(n + m)$, pois a inicialização custa $\Theta(n)$ e a soma do tamanho das listas de adjacências percorridas é $O(m)$.

O consumo de tempo de uma BFS é linear no tamanho do grafo.

Corretude

Vamos verificar que $u.d$ é a distância de s a u e que a árvore BF contém um caminho mínimo de s a u .

Corretude

Vamos verificar que $u.d$ é a distância de s a u e que a árvore BF contém um caminho mínimo de s a u .

Seja $\delta(s, u)$ a distância de s a u em G .

Corretude

Vamos verificar que $u.d$ é a distância de s a u e que a árvore BF contém um caminho mínimo de s a u .

Seja $\delta(s, u)$ a distância de s a u em G .

Lema: $\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1$ para toda aresta uv .

Corretude

Vamos verificar que $u.d$ é a distância de s a u e que a árvore BF contém um caminho mínimo de s a u .

Seja $\delta(s, u)$ a distância de s a u em G .

Lema: $\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1$ para toda aresta uv .

Lema: $v.d \geq \delta(s, v)$ para todo vértice ao final da BFS.

Corretude

Vamos verificar que $u.d$ é a distância de s a u e que a árvore BF contém um caminho mínimo de s a u .

Seja $\delta(s, u)$ a distância de s a u em G .

Lema: $\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1$ para toda aresta uv .

Lema: $v.d \geq \delta(s, v)$ para todo vértice ao final da BFS.

Lema: Se Q contém os vértices v_1, v_2, \dots, v_r nesta ordem, então $v_r.d \leq v_1.d + 1$ e $v_i.d \leq v_{i+1}.d$ para $i = 1, \dots, r - 1$.

Corretude

Seja $\delta(s, u)$ a distância de s a u em G .

Lema: $\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1$ para toda aresta uv .

Lema: $v.d \geq \delta(s, v)$ para todo vértice ao final da BFS.

Lema: Se Q contém os vértices v_1, v_2, \dots, v_r nesta ordem, então $v_r.d \leq v_1.d + 1$ e $v_i.d \leq v_{i+1}.d$ para $i = 1, \dots, r - 1$.

Corretude

Seja $\delta(s, u)$ a distância de s a u em G .

Lema: $\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1$ para toda aresta uv .

Lema: $v.d \geq \delta(s, v)$ para todo vértice ao final da BFS.

Lema: Se Q contém os vértices v_1, v_2, \dots, v_r nesta ordem, então $v_r.d \leq v_1.d + 1$ e $v_i.d \leq v_{i+1}.d$ para $i = 1, \dots, r - 1$.

Corolário: Se v_i entra na fila antes de v_j , então $v_i.d \leq v_j.d$ quando v_j entra na fila.

Corretude

Seja $\delta(s, u)$ a distância de s a u em G .

Lema: $\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1$ para toda aresta uv .

Lema: $v.d \geq \delta(s, v)$ para todo vértice ao final da BFS.

Lema: Se Q contém os vértices v_1, v_2, \dots, v_r nesta ordem, então $v_r.d \leq v_1.d + 1$ e $v_i.d \leq v_{i+1}.d$ para $i = 1, \dots, r - 1$.

Corolário: Se v_i entra na fila antes de v_j , então $v_i.d \leq v_j.d$ quando v_j entra na fila.

Teorema: Ao final da BFS, $v.d = \delta(s, v)$ para todo $v \in V$.
Ademais, para todo v alcançável de s com $v \neq s$, um caminho mais curto de s a v consiste em um caminho mais curto de s a $\pi[v]$ seguido da aresta $v.\pi$.

Algumas aplicações

- ▶ Determinar componentes conexas de um grafo.

Algumas aplicações

- ▶ Determinar componentes conexas de um grafo.
- ▶ Determinar se um grafo é bipartido.

Algumas aplicações

- ▶ Determinar componentes conexas de um grafo.
- ▶ Determinar se um grafo é bipartido.
- ▶ Decidir se uma palavra é aceita por um autômato não determinístico.

Algumas aplicações

- ▶ Determinar componentes conexas de um grafo.
- ▶ Determinar se um grafo é bipartido.
- ▶ Decidir se uma palavra é aceita por um autômato não determinístico.
- ▶ Algoritmo de Edmonds-Karp para fluxo máximo.

Algumas aplicações

- ▶ Determinar componentes conexas de um grafo.
- ▶ Determinar se um grafo é bipartido.
- ▶ Decidir se uma palavra é aceita por um autômato não determinístico.
- ▶ Algoritmo de Edmonds-Karp para fluxo máximo.

Algumas aplicações

- ▶ Determinar componentes conexas de um grafo.
- ▶ Determinar se um grafo é bipartido.
- ▶ Decidir se uma palavra é aceita por um autômato não determinístico.
- ▶ Algoritmo de Edmonds-Karp para fluxo máximo.

As duas últimas só com breves comentários em aula.

Componentes conexas

Num grafo dizemos que um vértice u é **alcançável** a partir de um vértice v se existe caminho de v a u .

Componentes conexas

Num grafo dizemos que um vértice u é **alcançável** a partir de um vértice v se existe caminho de v a u .

- ▶ Num grafo dirigido, essa relação é transitiva e reflexiva.

Componentes conexas

Num grafo dizemos que um vértice u é **alcançável** a partir de um vértice v se existe caminho de v a u .

- ▶ Num grafo dirigido, essa relação é transitiva e reflexiva.
- ▶ Num grafo não dirigido, ela é de equivalência. Os subgrafos induzidos pelas classes são as componentes conexas do grafo.

Componentes conexas

Num grafo dizemos que um vértice u é **alcançável** a partir de um vértice v se existe caminho de v a u .

- ▶ Num grafo dirigido, essa relação é transitiva e reflexiva.
- ▶ Num grafo não dirigido, ela é de equivalência. Os subgrafos induzidos pelas classes são as componentes conexas do grafo.

Componentes conexas

Num grafo dizemos que um vértice u é **alcançável** a partir de um vértice v se existe caminho de v a u .

- ▶ Num grafo dirigido, essa relação é transitiva e reflexiva.
- ▶ Num grafo não dirigido, ela é de equivalência. Os subgrafos induzidos pelas classes são as componentes conexas do grafo.

Como achar as componentes?

Componentes conexas

Num grafo dizemos que um vértice u é **alcançável** a partir de um vértice v se existe caminho de v a u .

- ▶ Num grafo dirigido, essa relação é transitiva e reflexiva.
- ▶ Num grafo não dirigido, ela é de equivalência. Os subgrafos induzidos pelas classes são as componentes conexas do grafo.

Como achar as componentes?

Basta achar as classes.

Componentes conexas

Num grafo dizemos que um vértice u é **alcançável** a partir de um vértice v se existe caminho de v a u .

- ▶ Num grafo dirigido, essa relação é transitiva e reflexiva.
- ▶ Num grafo não dirigido, ela é de equivalência. Os subgrafos induzidos pelas classes são as componentes conexas do grafo.

Como achar as componentes?

Basta achar as classes.

BFS a partir de um vértice determina sua classe.

Grafos bipartidos

Um grafo é **bipartido** se é possível dividir seus vértices em duas classes de tal modo que cada aresta tem uma ponta em cada classe.

Grafos bipartidos

Um grafo é **bipartido** se é possível dividir seus vértices em duas classes de tal modo que cada aresta tem uma ponta em cada classe.

ALGORITMO -Decide se G (conexo) é bipartido

Grafos bipartidos

Um grafo é **bipartido** se é possível dividir seus vértices em duas classes de tal modo que cada aresta tem uma ponta em cada classe.

ALGORITMO -Decide se G (conexo) é bipartido

Faça uma BFS. Pequena alteração: Se $v.d == u.d$, devolva NÃO.
Se terminou, a bipartição é dada pela paridade do d .

Grafos bipartidos

Um grafo é **bipartido** se é possível dividir seus vértices em duas classes de tal modo que cada aresta tem uma ponta em cada classe.

ALGORITMO -Decide se G (conexo) é bipartido

Faça uma BFS. Pequena alteração: Se $v.d == u.d$, devolva NÃO.
Se terminou, a bipartição é dada pela paridade do d .

O algoritmo tem a mesma complexidade da BFS. A corretude vem junto com o

Grafos bipartidos

Um grafo é **bipartido** se é possível dividir seus vértices em duas classes de tal modo que cada aresta tem uma ponta em cada classe.

ALGORITMO -Decide se G (conexo) é bipartido

Faça uma BFS. Pequena alteração: Se $v.d == u.d$, devolva NÃO.
Se terminou, a bipartição é dada pela paridade do d .

O algoritmo tem a mesma complexidade da BFS. A corretude vem junto com o

Teorema

Um grafo é bipartido se e só se não tem um circuito ímpar.

Grafos bipartidos

Um grafo é **bipartido** se é possível dividir seus vértices em duas classes de tal modo que cada aresta tem uma ponta em cada classe.

ALGORITMO -Decide se G (conexo) é bipartido

Faça uma BFS. Pequena alteração: Se $v.d == u.d$, devolva NÃO.
Se terminou, a bipartição é dada pela paridade do d .

O algoritmo tem a mesma complexidade da BFS. A corretude vem junto com o

Teorema

Um grafo é bipartido se e só se não tem um circuito ímpar.

Prova: Necessidade é fácil. Suficiência: modificar o algoritmo para devolver um circuito ímpar no caso NÃO.

Grafos tripartidos

Um grafo é **tripartido** se é possível dividir seus vértices em três classes de tal modo que cada aresta tenha as pontas em classes diferentes.

Grafos tripartidos

Um grafo é **tripartido** se é possível dividir seus vértices em três classes de tal modo que cada aresta tenha as pontas em classes diferentes.

Exercício

Encontrar um algoritmo polinomial para decidir se um grafo é tripartido.

Grafos tripartidos

Um grafo é **tripartido** se é possível dividir seus vértices em três classes de tal modo que cada aresta tenha as pontas em classes diferentes.

Exercício

Encontrar um algoritmo polinomial para decidir se um grafo é tripartido.

PRÊMIOS

Grafos tripartidos

Um grafo é **tripartido** se é possível dividir seus vértices em três classes de tal modo que cada aresta tenha as pontas em classes diferentes.

Exercício

Encontrar um algoritmo polinomial para decidir se um grafo é tripartido.

PRÊMIOS

Nota A no curso

Grafos tripartidos

Um grafo é **tripartido** se é possível dividir seus vértices em três classes de tal modo que cada aresta tenha as pontas em classes diferentes.

Exercício

Encontrar um algoritmo polinomial para decidir se um grafo é tripartido.

PRÊMIOS

Nota A no curso

+

Grafos tripartidos

Um grafo é **tripartido** se é possível dividir seus vértices em três classes de tal modo que cada aresta tenha as pontas em classes diferentes.

Exercício

Encontrar um algoritmo polinomial para decidir se um grafo é tripartido.

PRÊMIOS

Nota A no curso

+

Título de Doutor

Grafos tripartidos

Um grafo é **tripartido** se é possível dividir seus vértices em três classes de tal modo que cada aresta tenha as pontas em classes diferentes.

Exercício

Encontrar um algoritmo polinomial para decidir se um grafo é tripartido.

PRÊMIOS

Nota A no curso

+

Título de Doutor

+

Grafos tripartidos

Um grafo é **tripartido** se é possível dividir seus vértices em três classes de tal modo que cada aresta tenha as pontas em classes diferentes.

Exercício

Encontrar um algoritmo polinomial para decidir se um grafo é tripartido.

PRÊMIOS

Nota A no curso

+

Título de Doutor

+

US\$10⁶