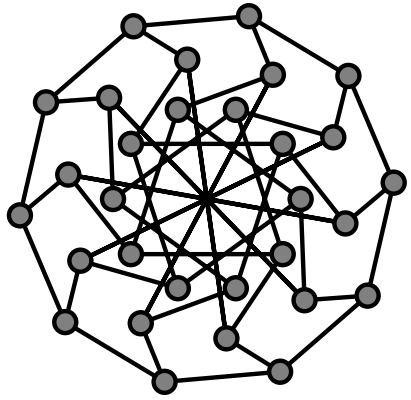
DFS e ordenação topológica

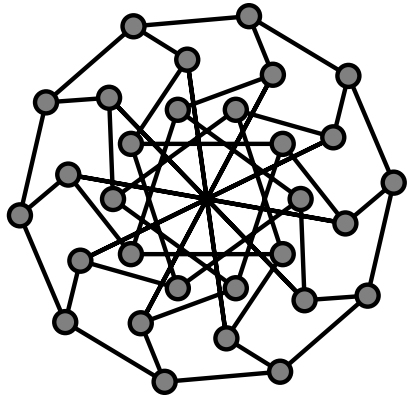
CLRS 22 Elementary Graph Algorithms

CLRS 22.3 e 22.4

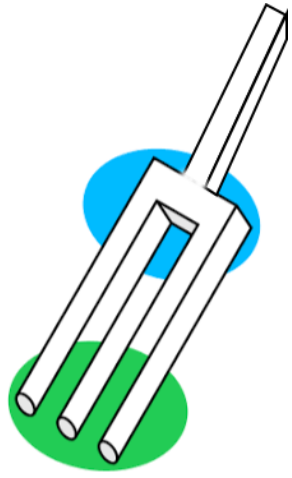
Grafo conexo



Grafo conexo



Garfo sem nexo



DFS

Outra moldura de algoritmos que vão fazendo seu serviço enquanto percorrem o grafo.

DFS

Outra moldura de algoritmos que vão fazendo seu serviço enquanto percorrem o grafo.

Produz uma estrutura bem mais sofisticada que a BFS.

Busca em profundidade - elementos

Vértice branco: ainda não descoberto

Vértice cinzento: descoberto, em processamento

Vértice preto: processado

Busca em profundidade - elementos

Vértice branco: ainda não descoberto

Vértice cinzento: descoberto, em processamento

Vértice preto: processado

DFS termina descrevendo via π uma floresta DF (Ou BP).

$u.\pi$: predecessor ou pai de u na floresta DF

Busca em profundidade - elementos

Vértice branco: ainda não descoberto

Vértice cinzento: descoberto, em processamento

Vértice preto: processado

DFS termina descrevendo via π uma floresta DF (Ou BP).

$u.\pi$: predecessor ou pai de u na floresta DF

Faz duas marcas de tempo:

$u.d$: momento da descoberta de u
$u.f$: momento da finalização de u

Busca em profundidade - elementos

Vértice branco: ainda não descoberto

Vértice cinzento: descoberto, em processamento

Vértice preto: processado

DFS termina descrevendo via π uma floresta DF (Ou BP).

$u.\pi$: predecessor ou pai de u na floresta DF

Faz duas marcas de tempo:

$u.d$: momento da descoberta de u
$u.f$: momento da finalização de u

u é branco antes de $u.d$,
cinzento entre $u.d$ e $u.f$,
preto depois de $u.f$.

Busca em profundidade

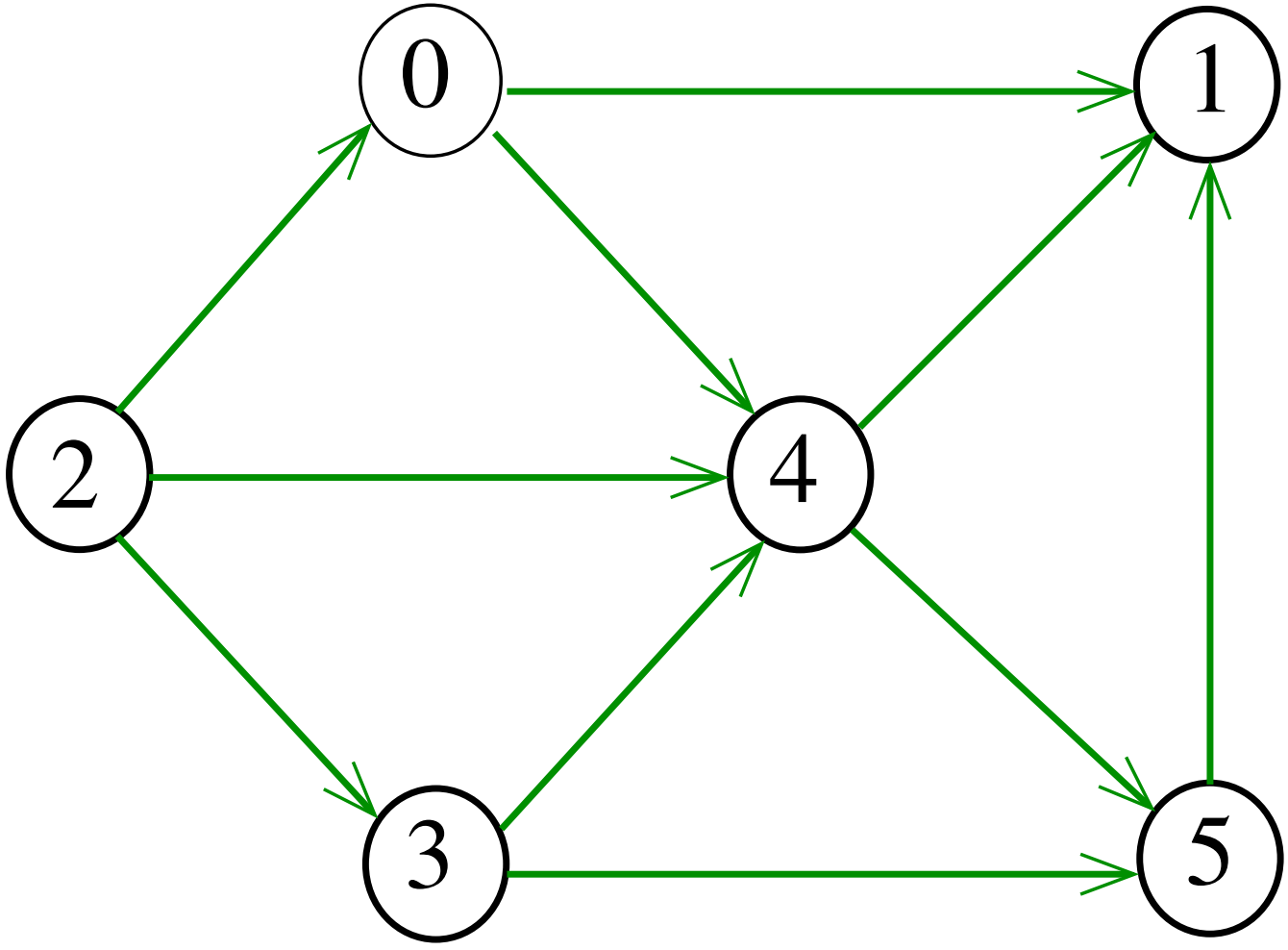
```
DFS (G)
 1  para cada u ∈ V(G) faça
 2       u.cor ← branco        u.π ← nil
 3  tempo ← 0
 4  para cada u ∈ V(G) faça
 5       se u.cor = branco
 6            então DFS-Visit(u)
```

Busca em profundidade

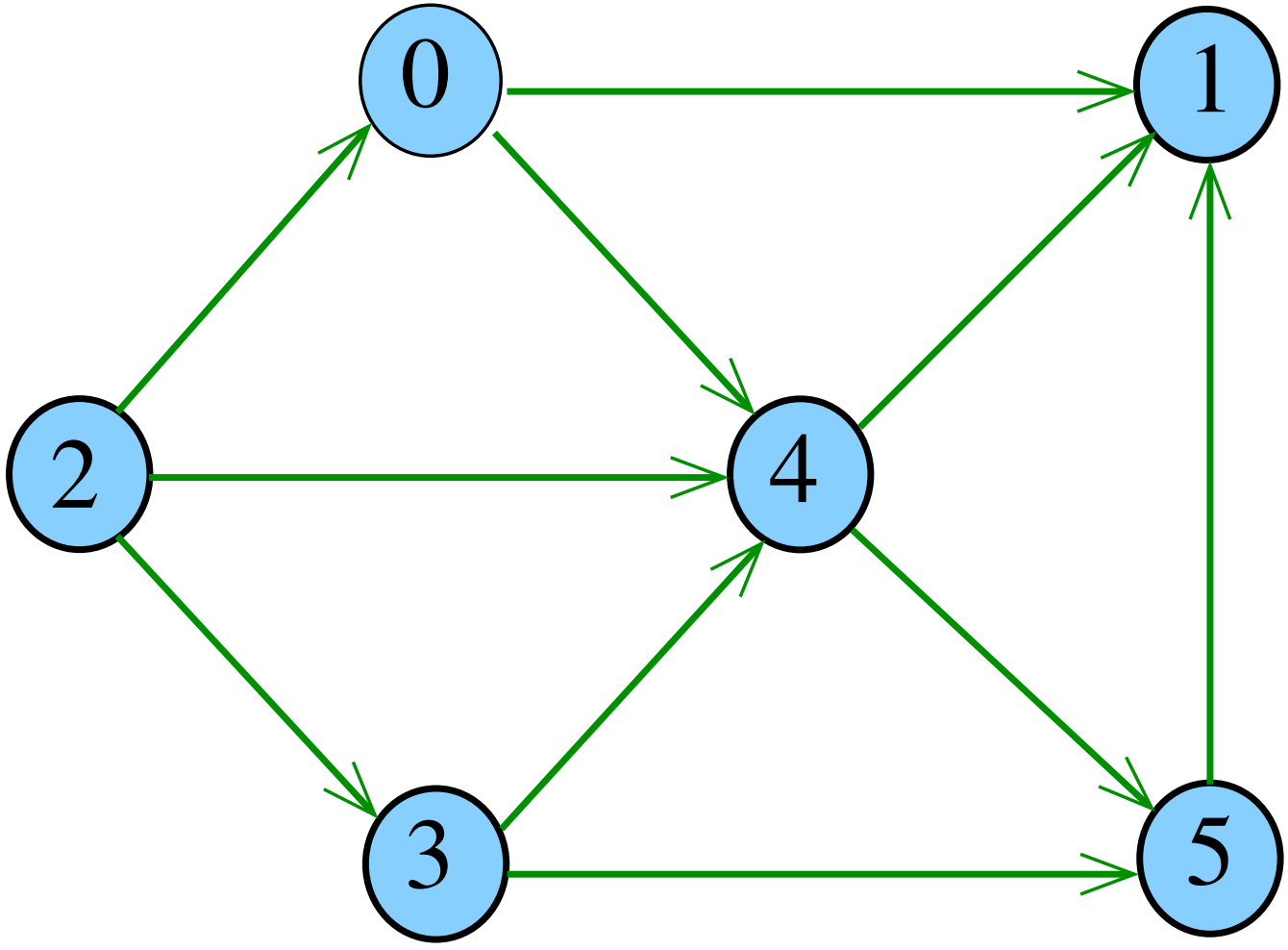
```
DFS (G)
 1  para cada u ∈ V(G) faça
 2       u.cor ← branco        u.π ← nil
 3  tempo ← 0
 4  para cada u ∈ V(G) faça
 5       se u.cor = branco
 6            então DFS-Visit(u)
```

```
DFS-Visit(G, u)
 1  u.cor ← cinzento    u.d ← tempo    tempo ← tempo + 1
 3  para cada v ∈ u.Estrela faça
 4       se v.cor = branco
 5            então v.π ← u
 6                 DFS-Visit(G, v)
 7  u.cor ← preto
 8  u.f ← tempo          tempo ← tempo + 1
```

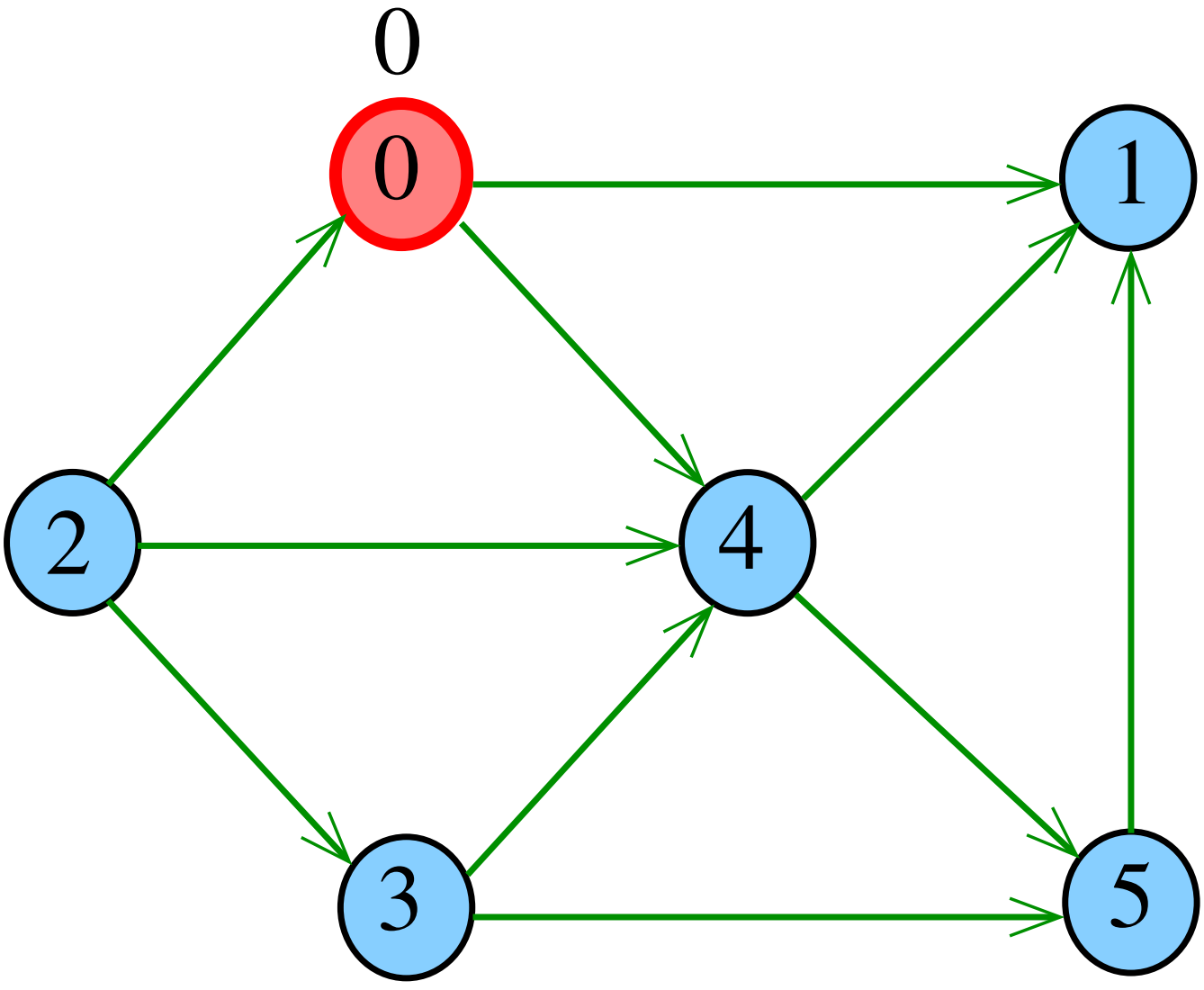
DFS(G)



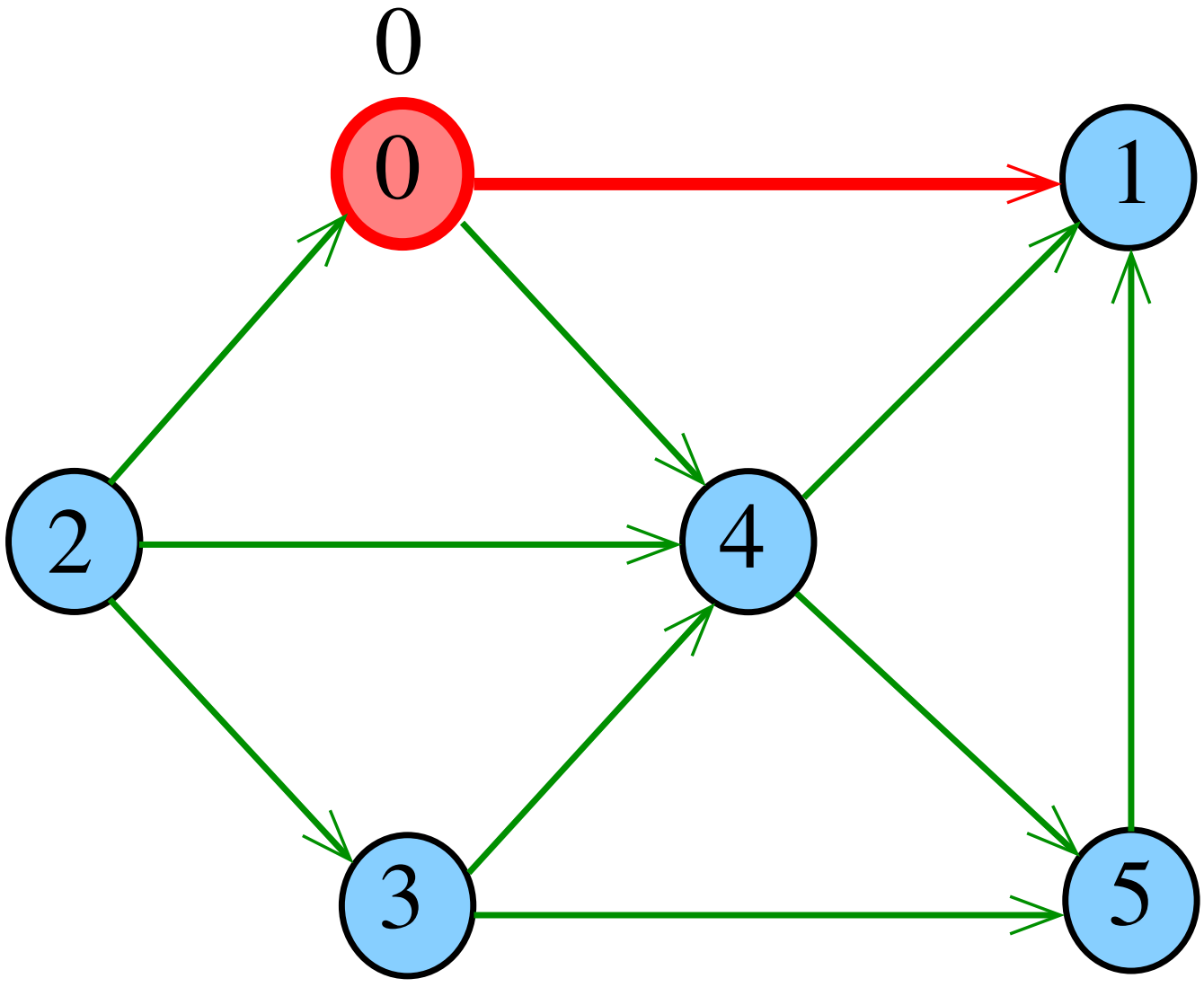
DFS(G)



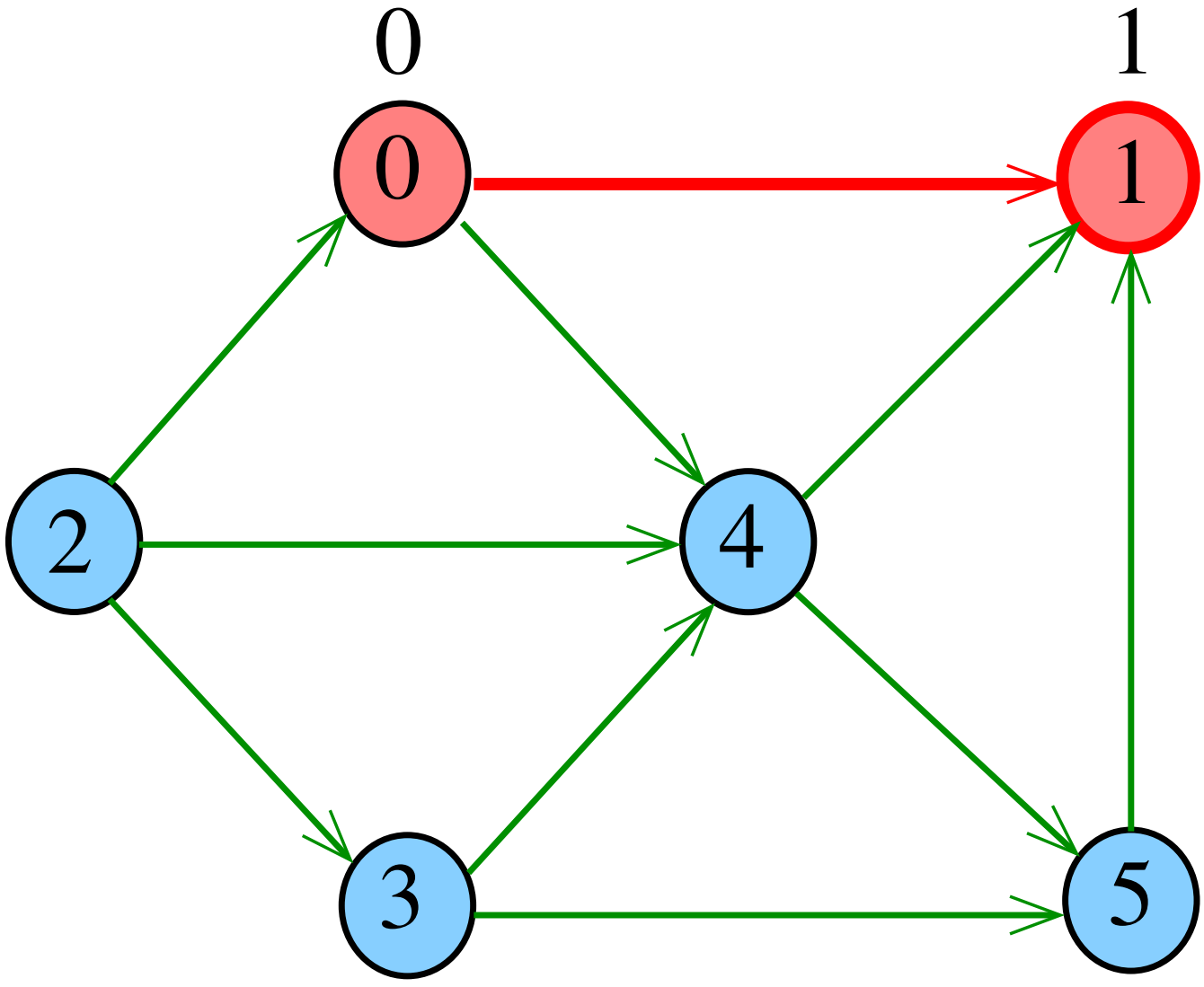
DFS-Visit(G,0)



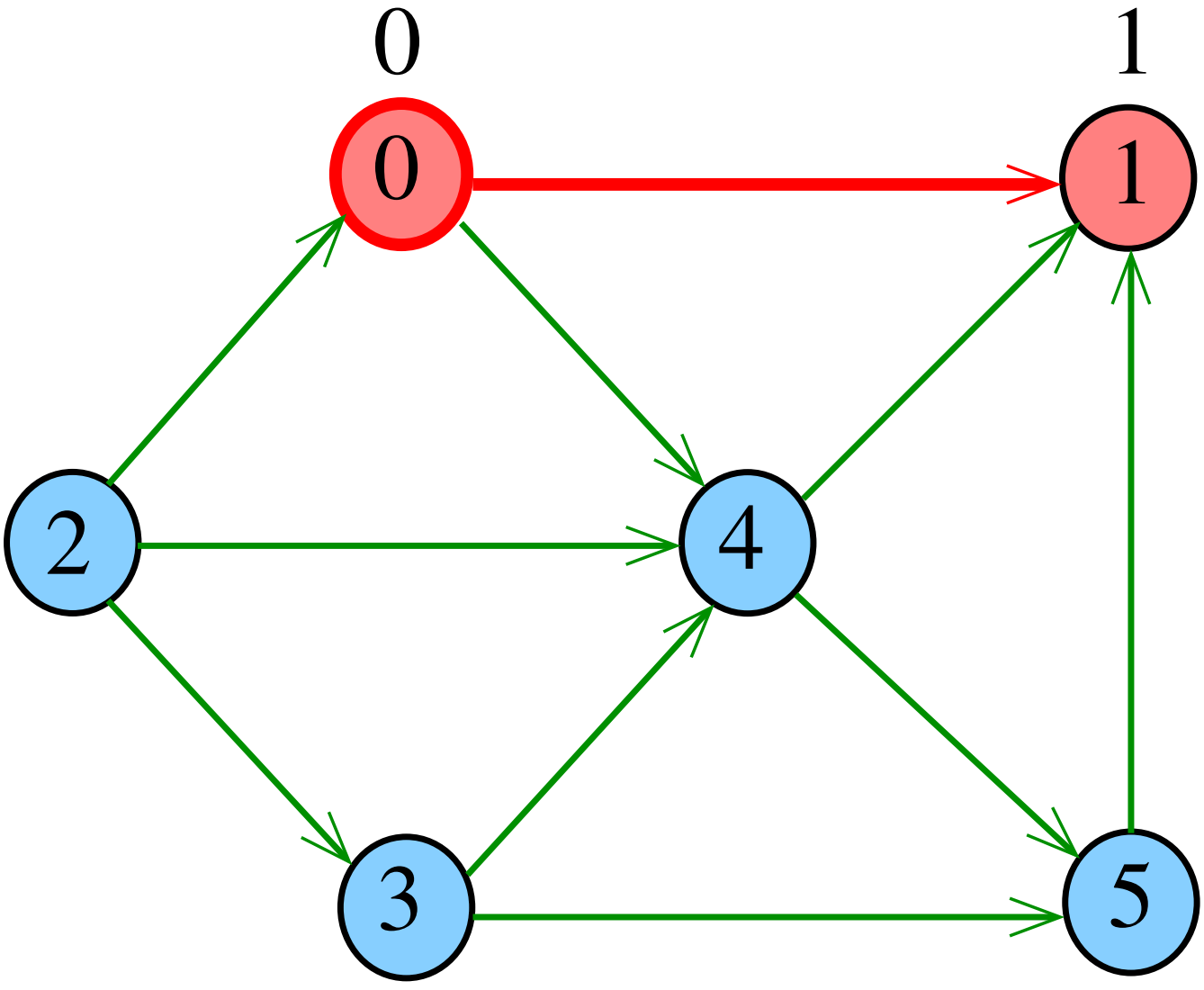
DFS-Visit(G,0)



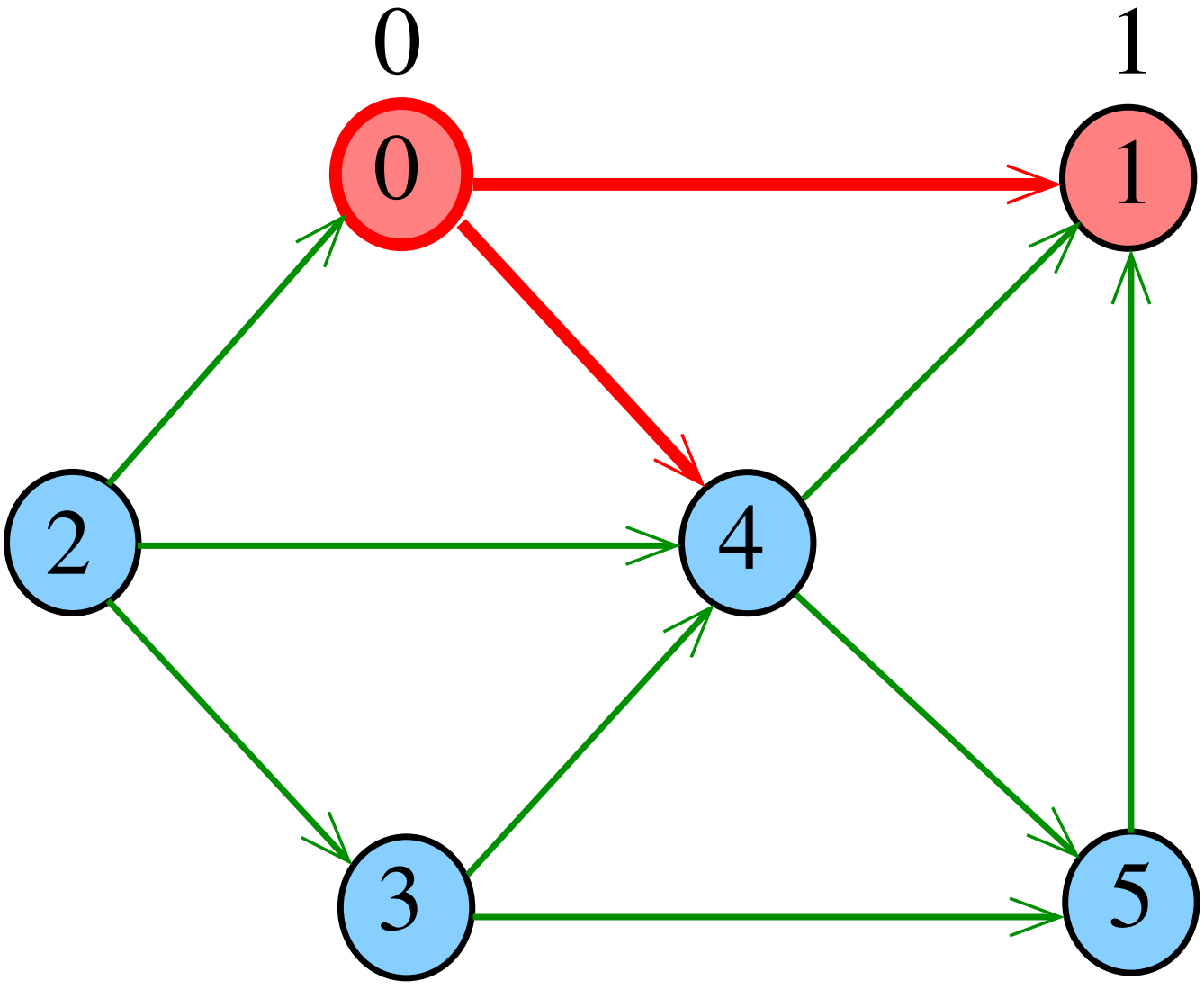
DFS-Visit(G,1)



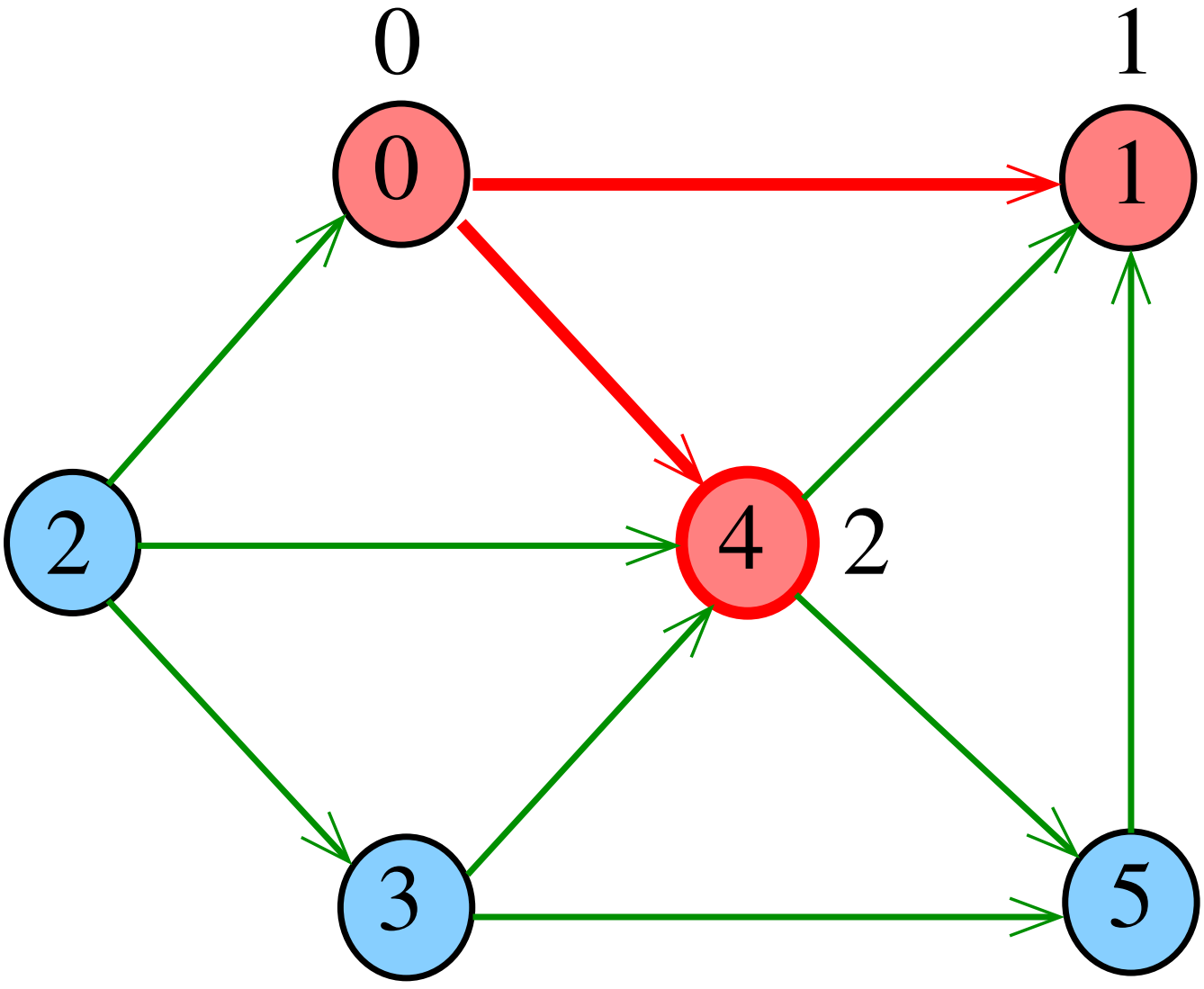
DFS-Visit(G,0)



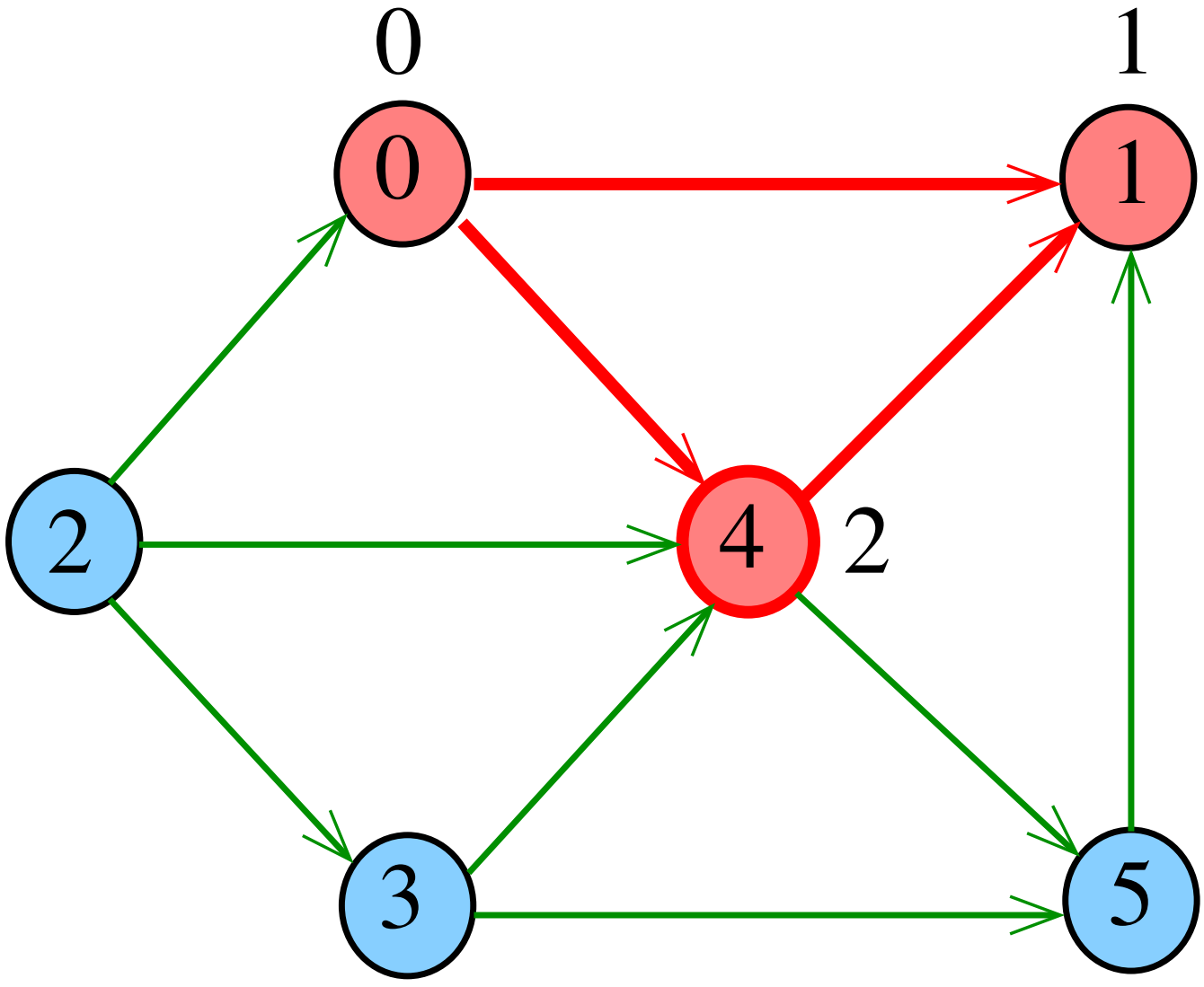
DFS-Visit(G,0)



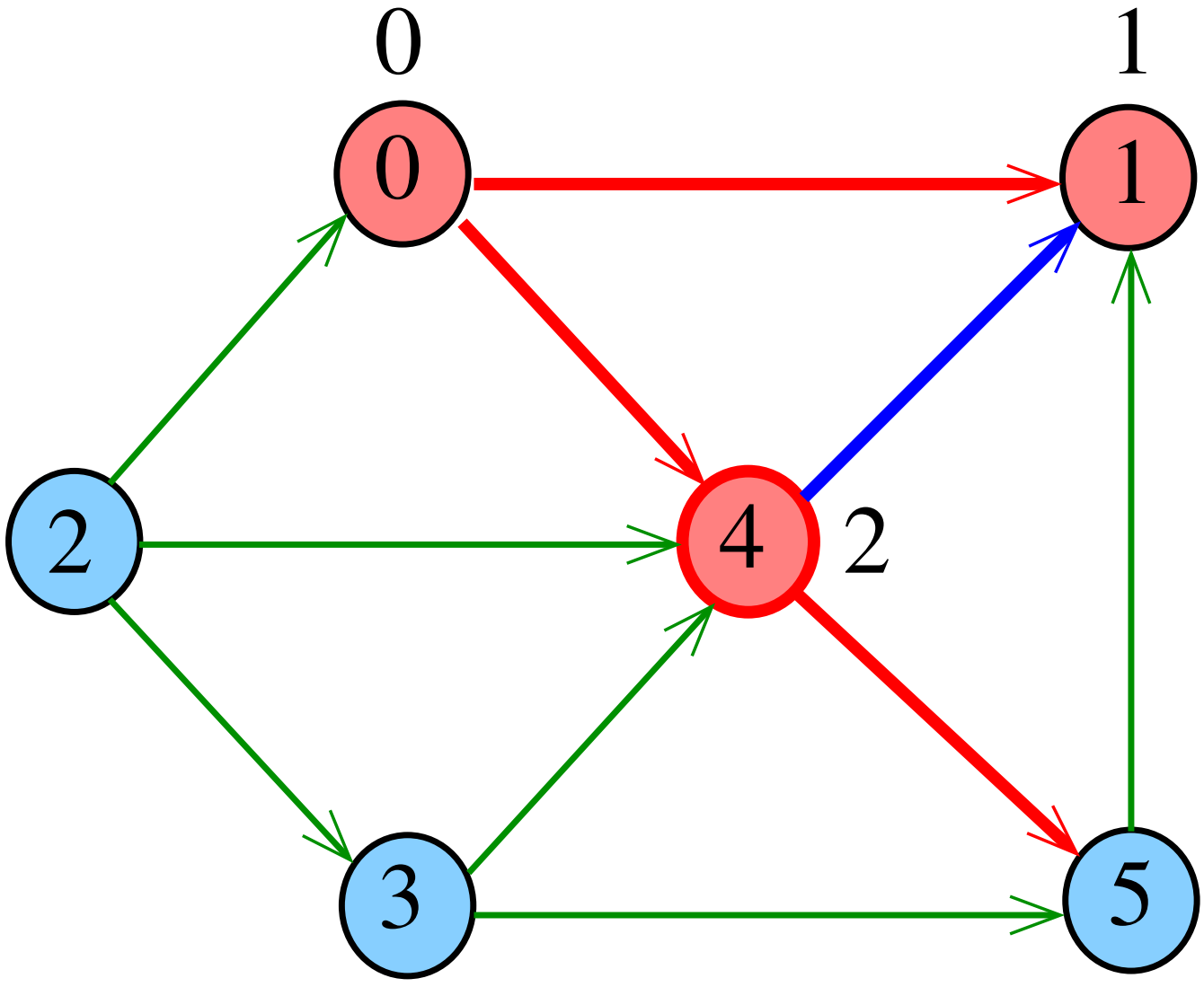
DFS-Visit(G,4)



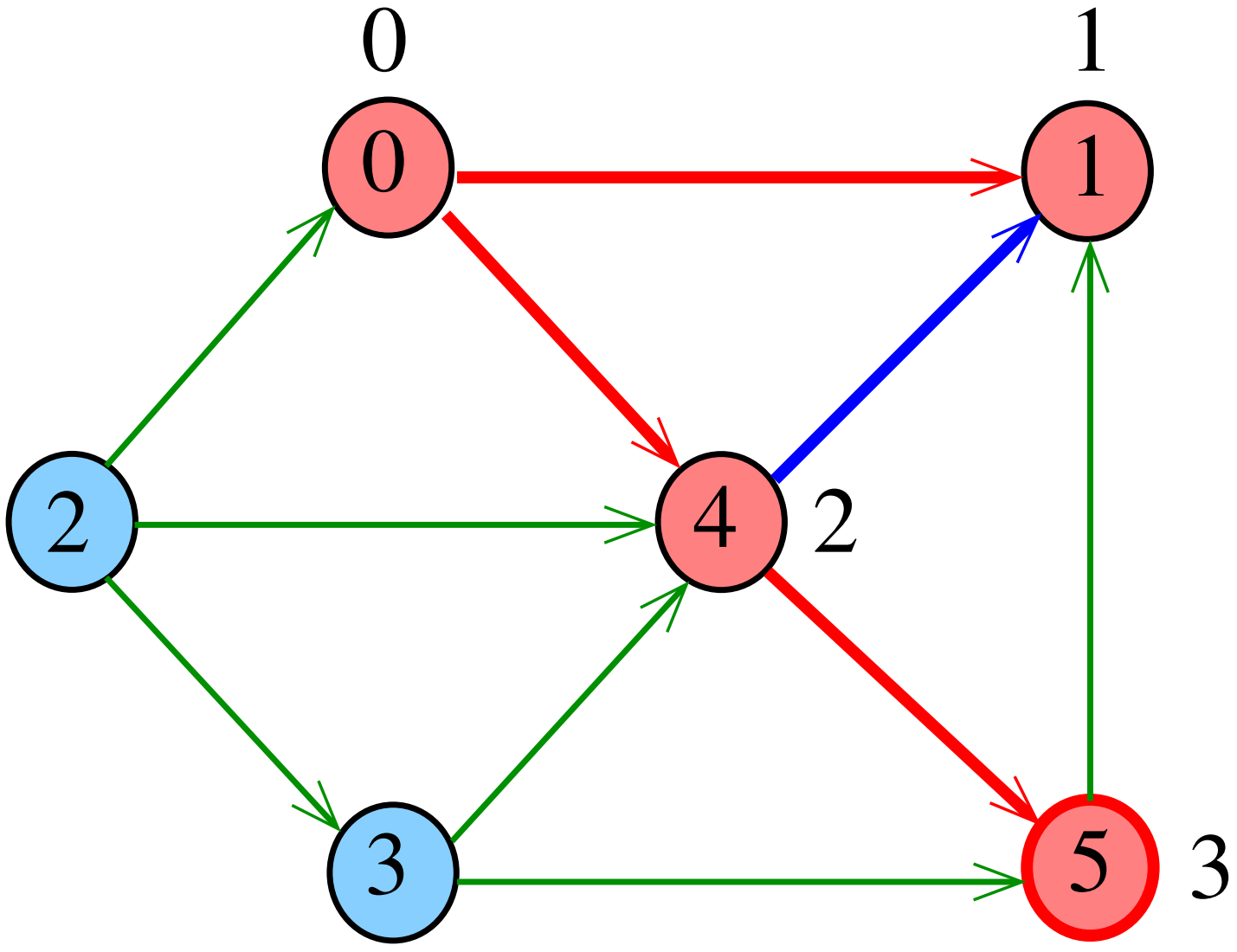
DFS-Visit(G,4)



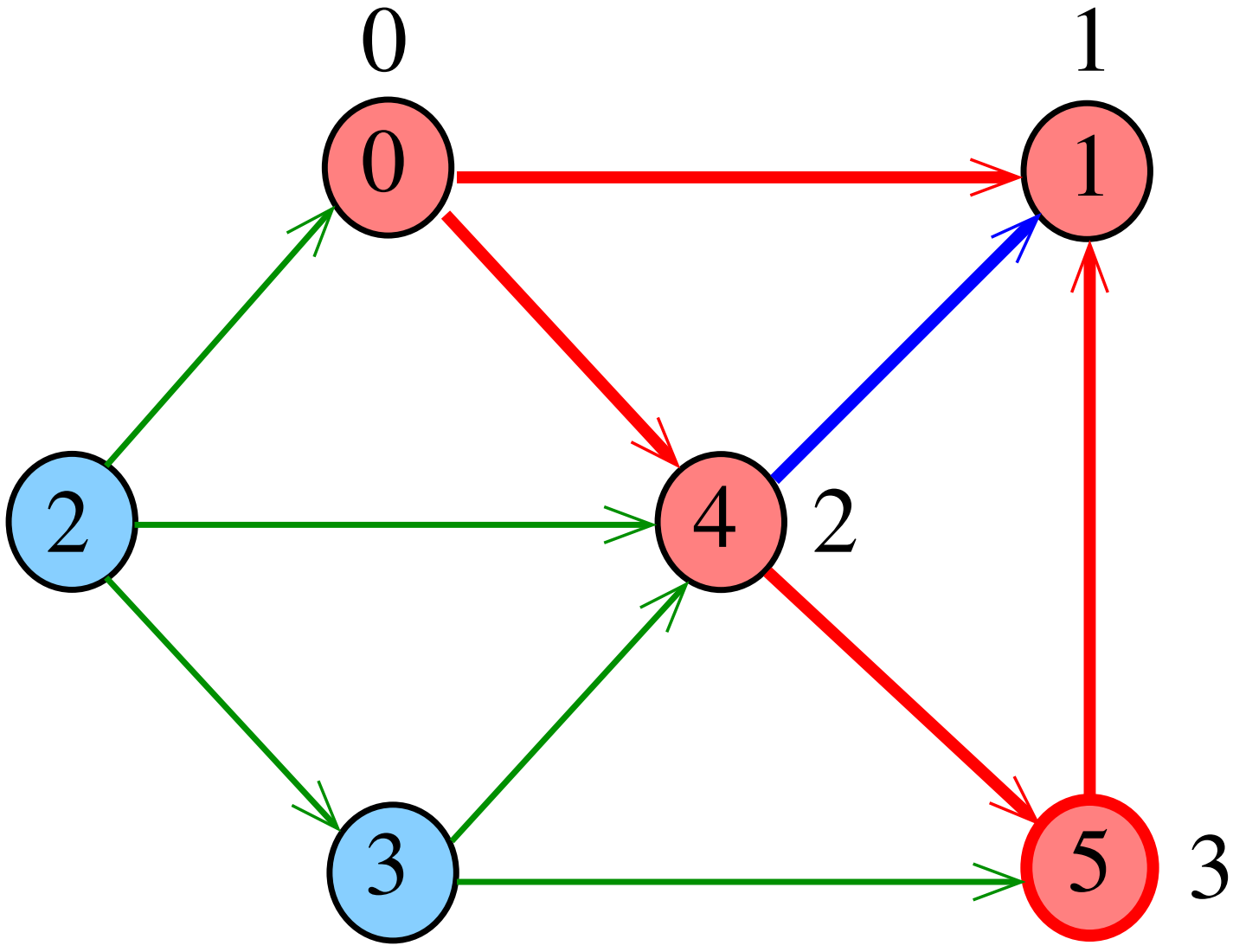
DFS-Visit(G,4)



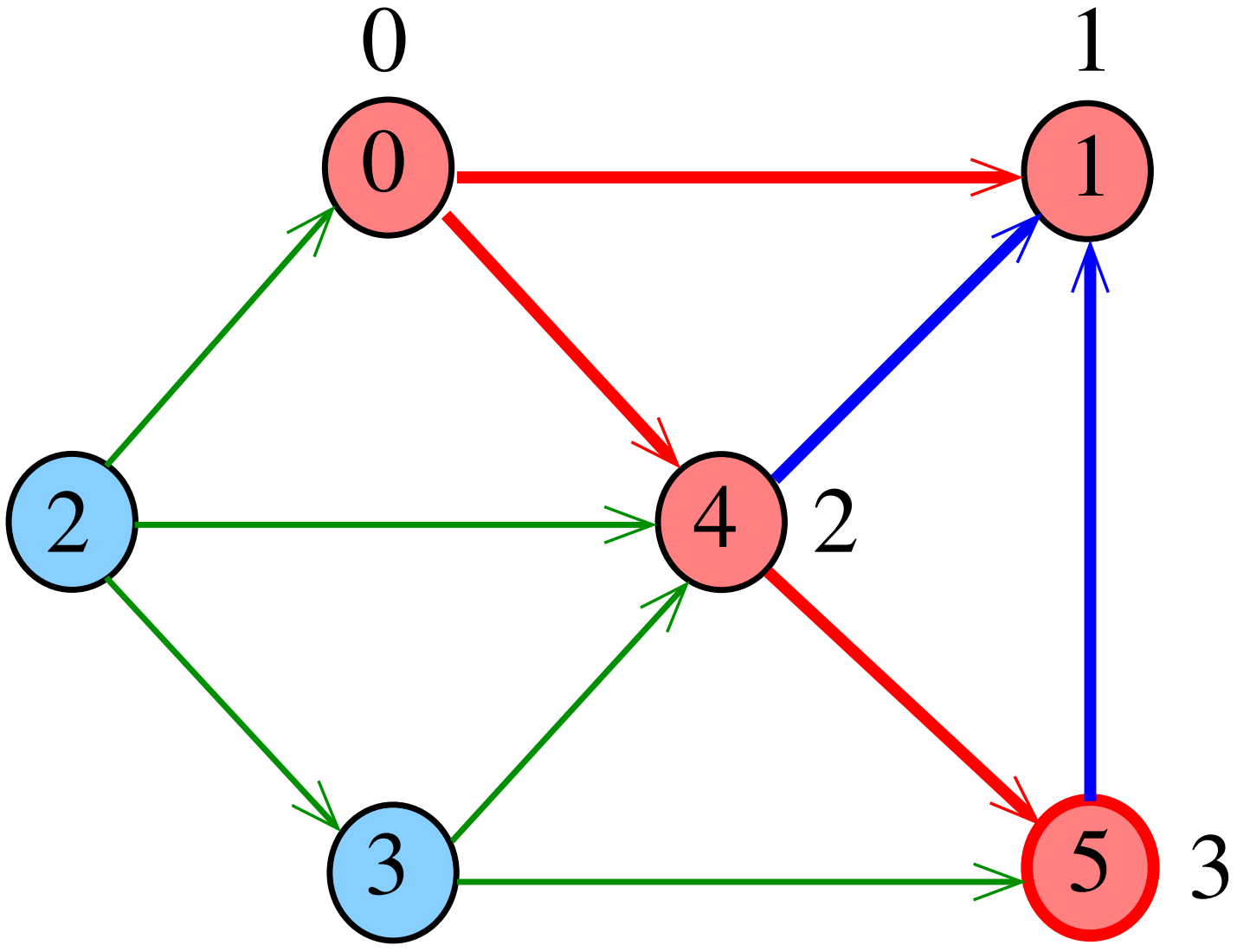
DFS-Visit(G,5)



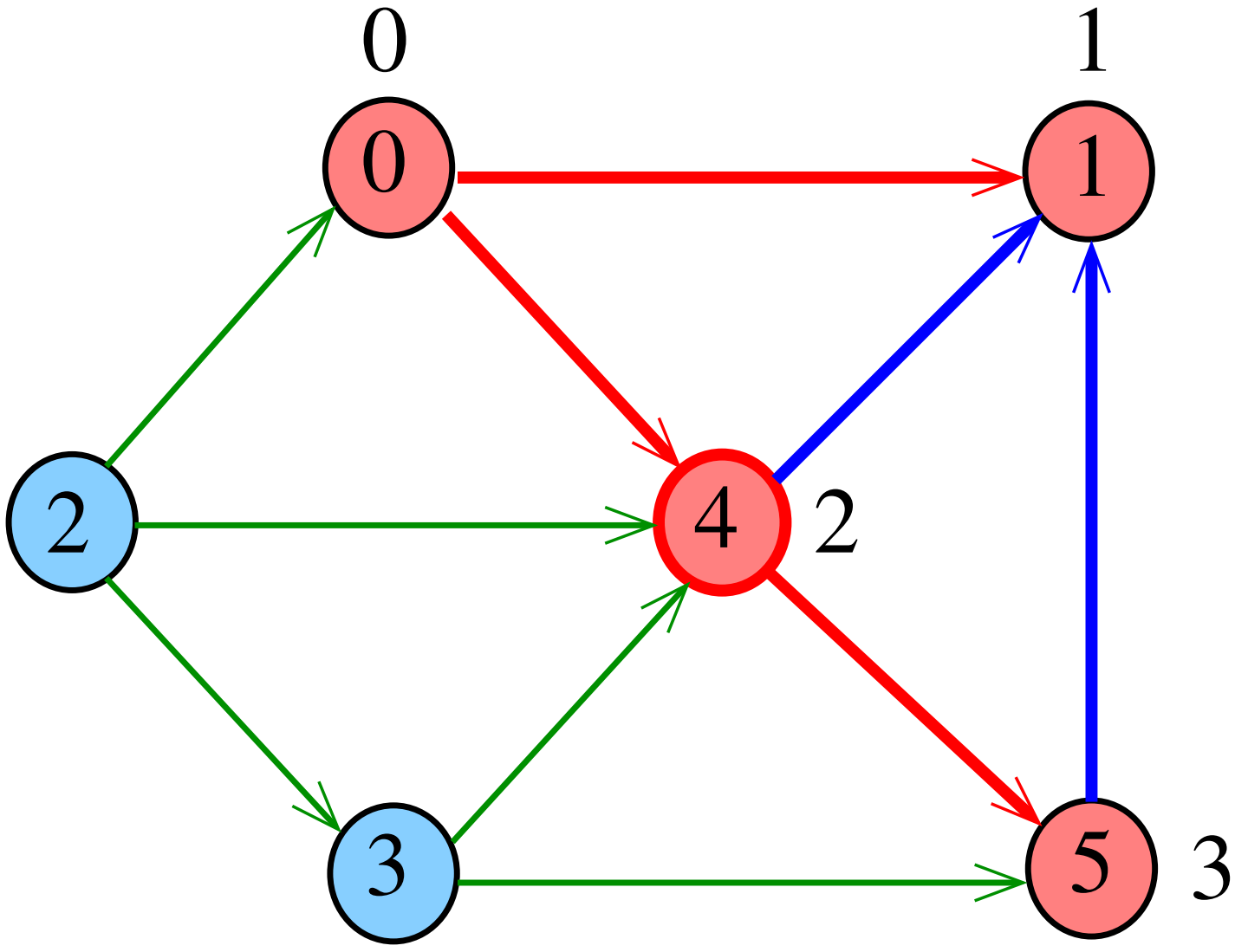
DFS-Visit(G,5)



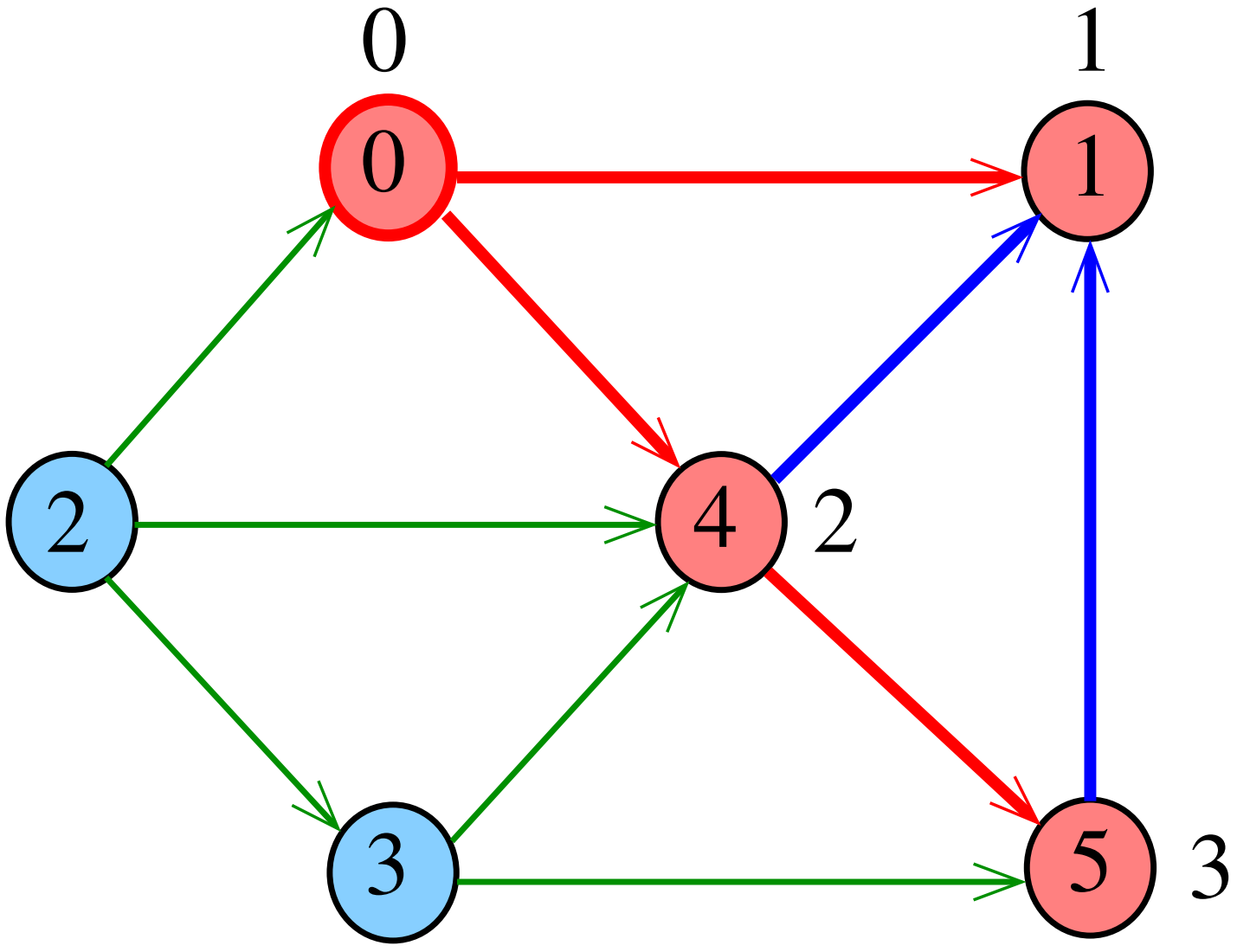
DFS-Visit(G,5)



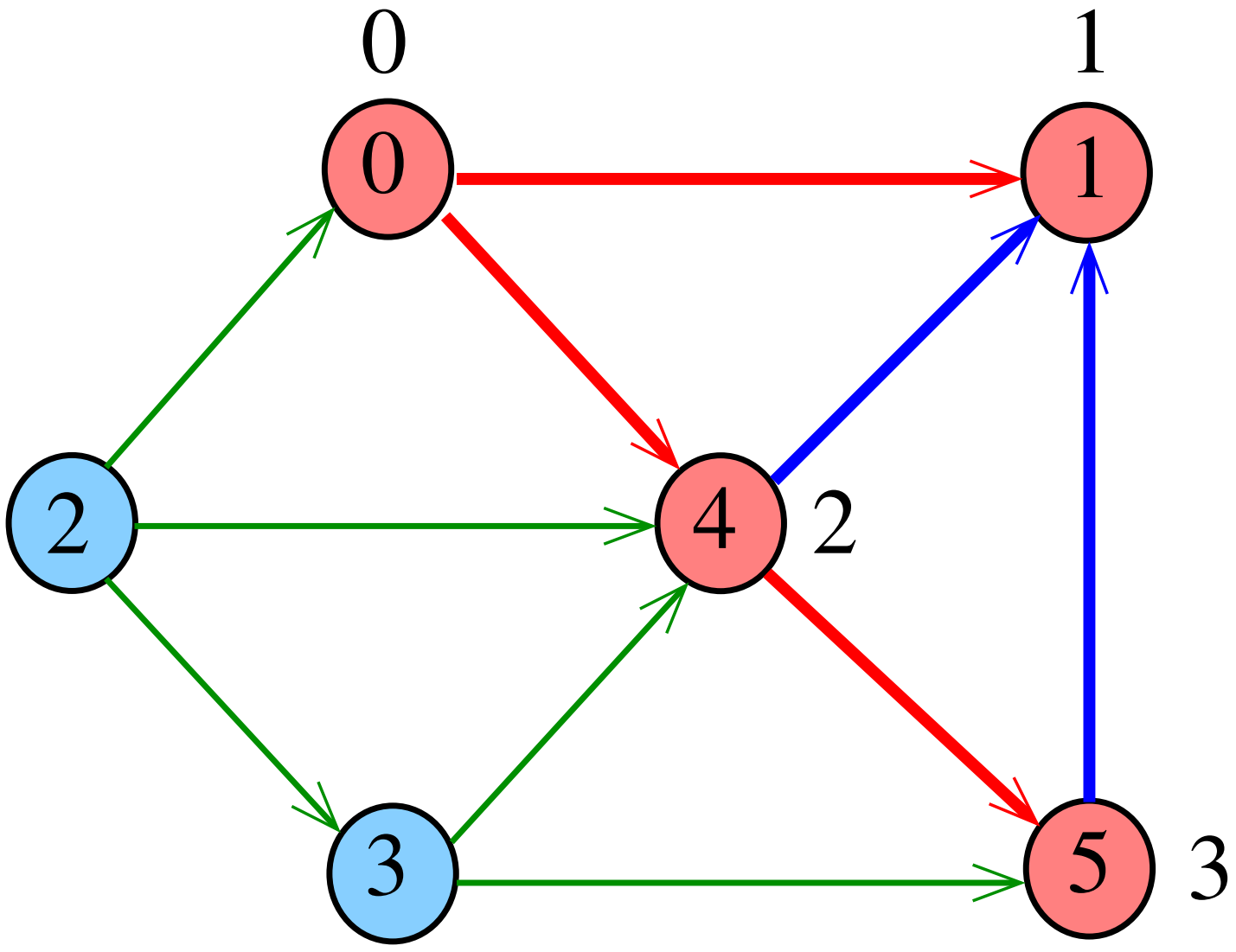
DFS-Visit(G,4)



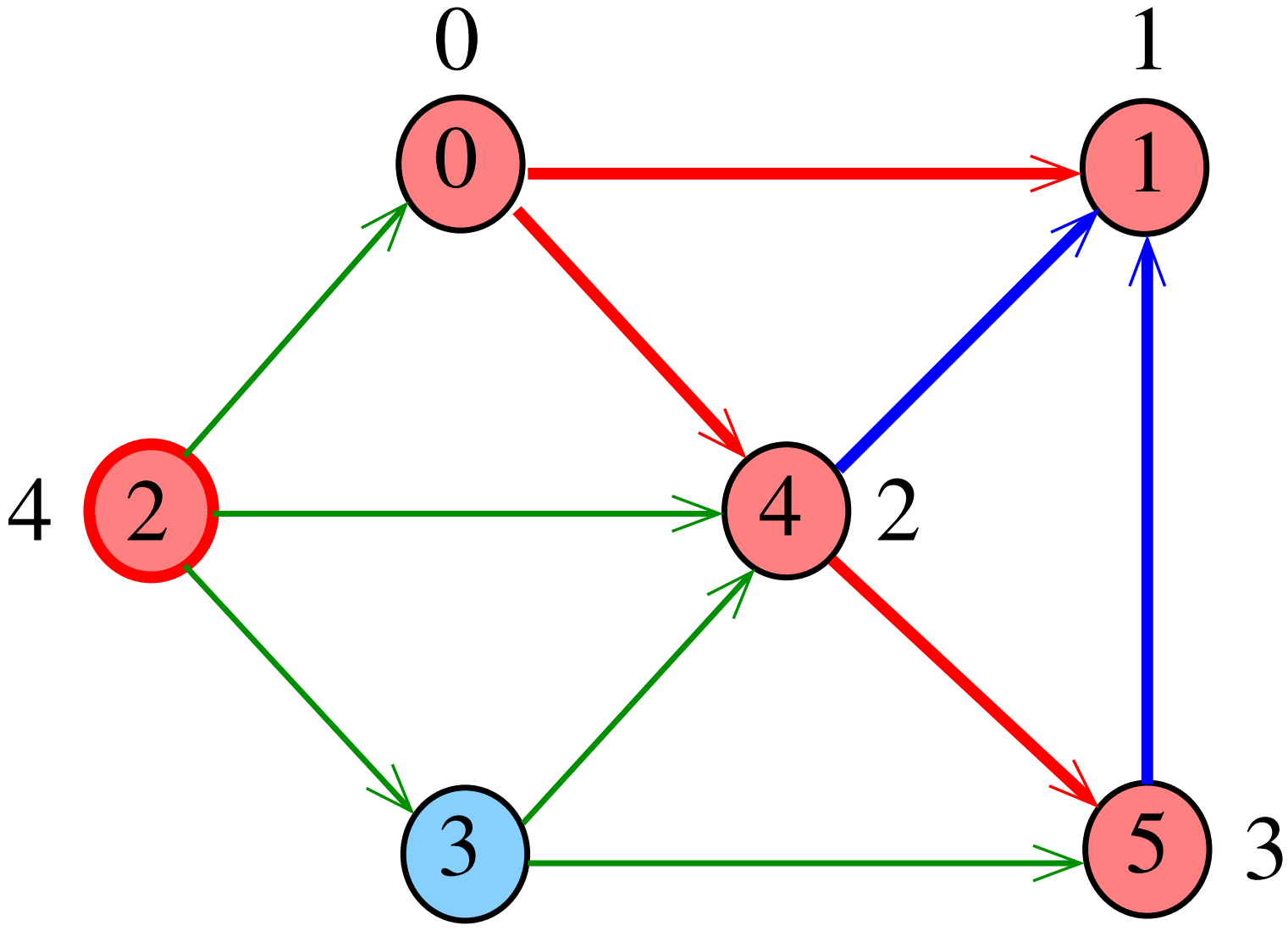
DFS-Visit(G,0)



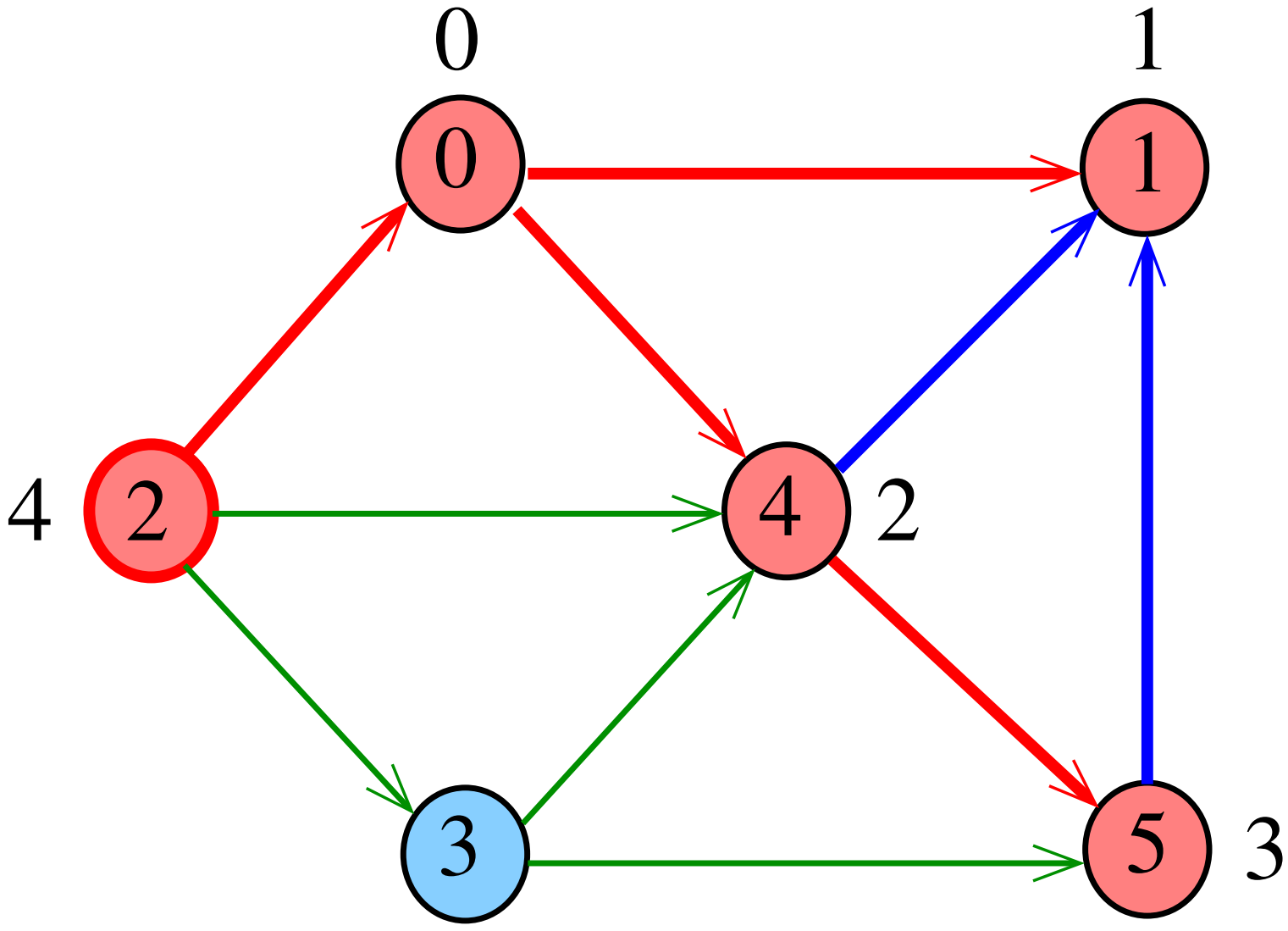
DIGRAPHdfs(G)



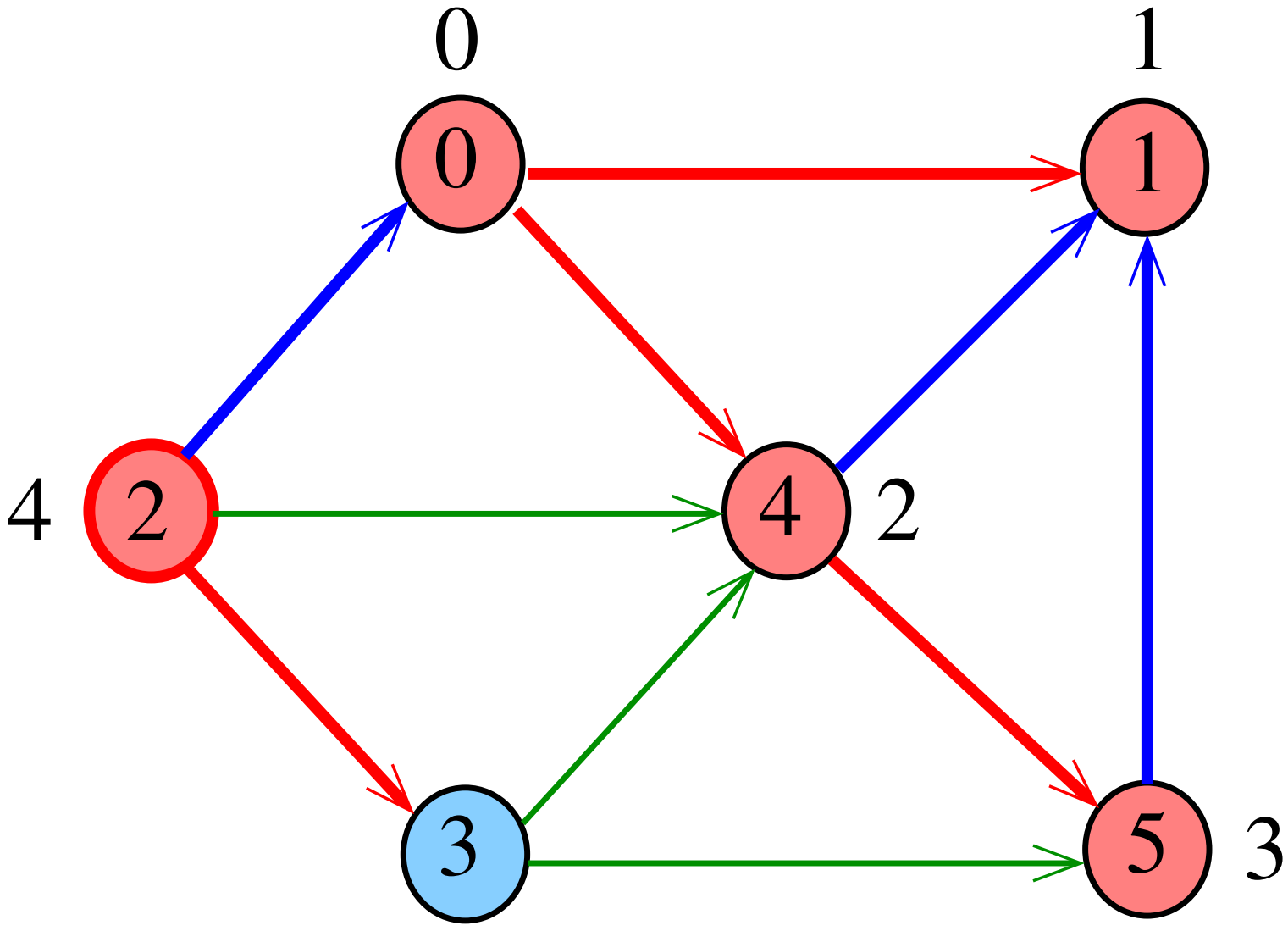
DFS-Visit(G,2)



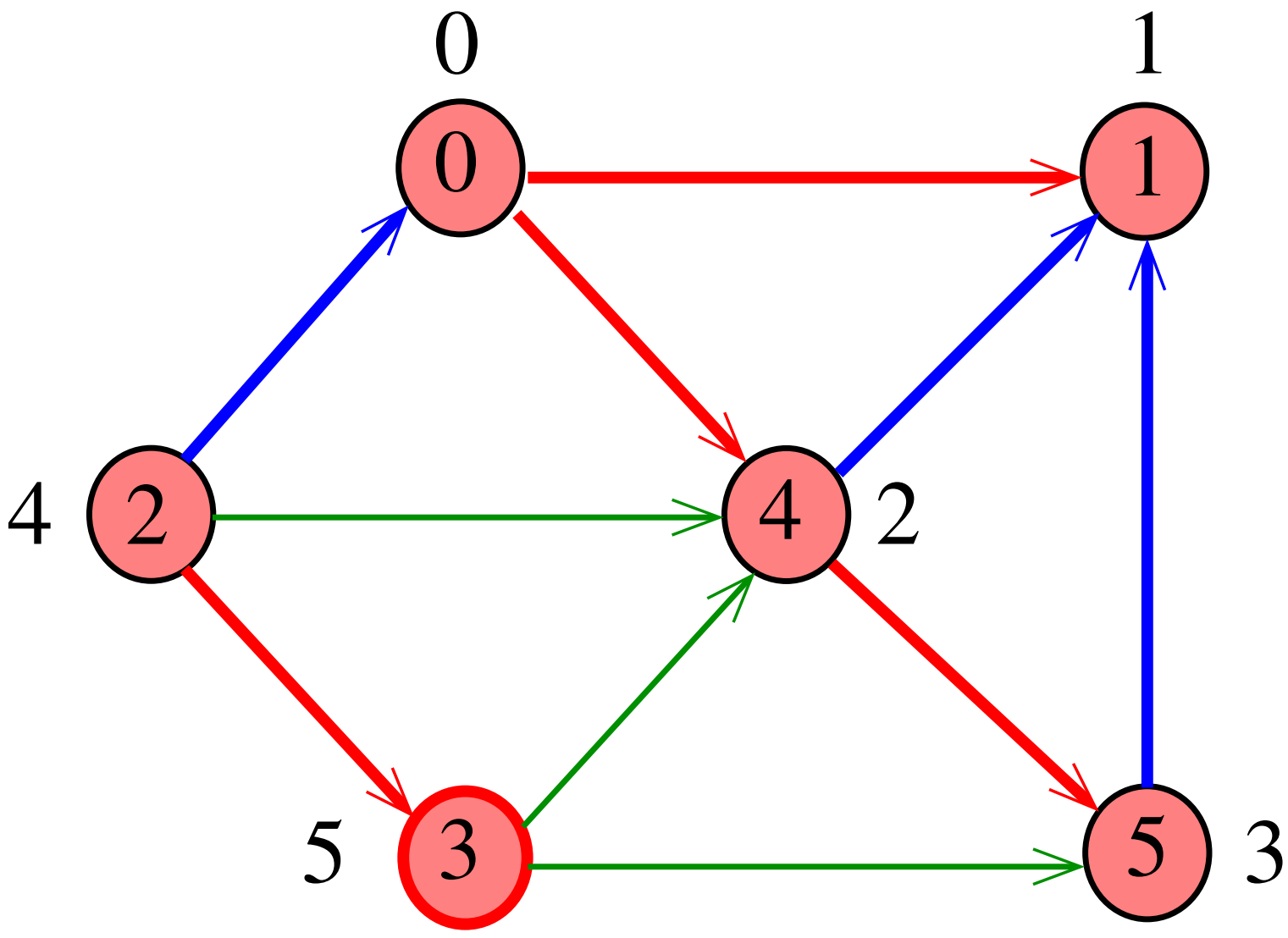
DFS-Visit(G,2)



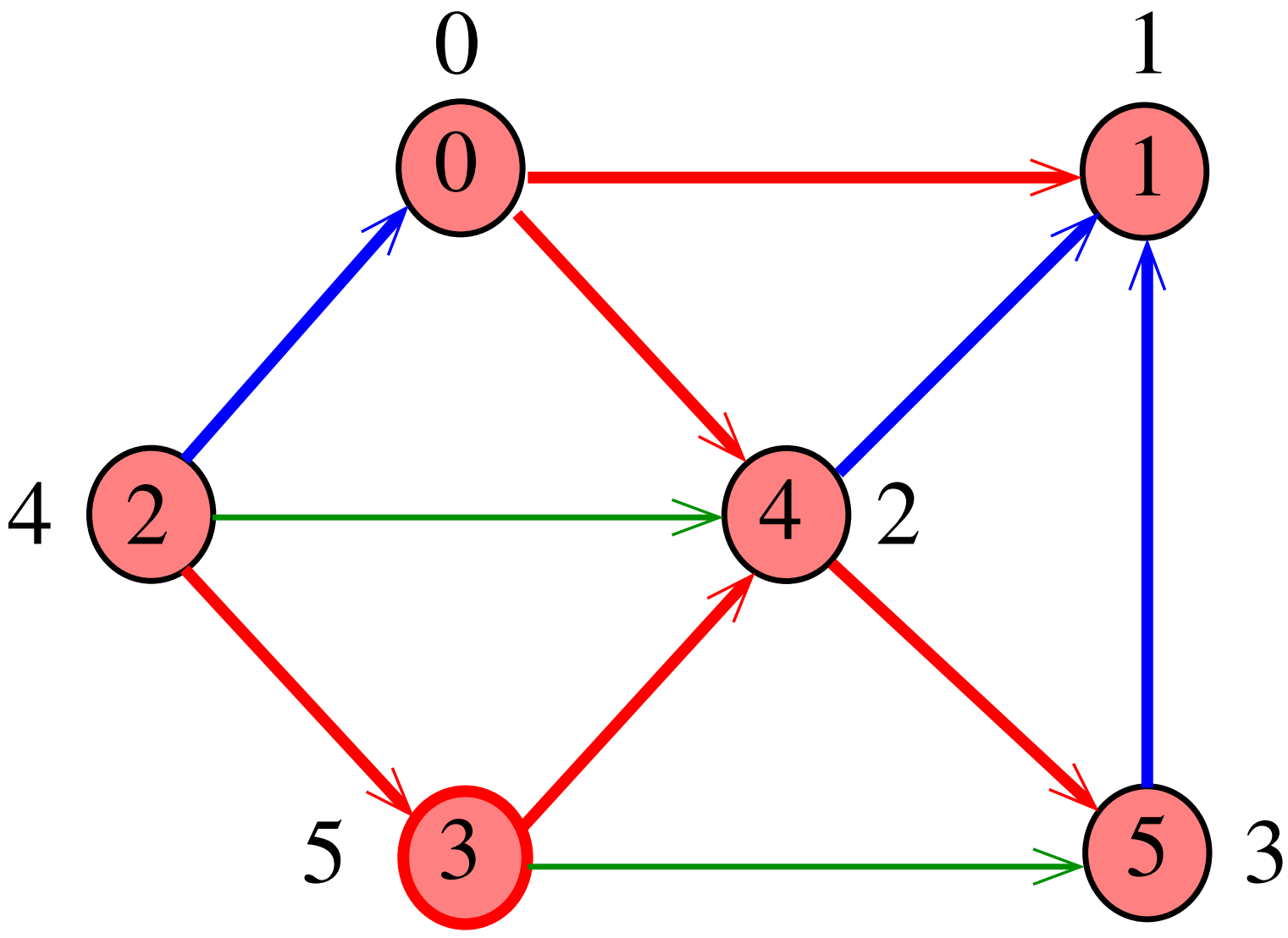
DFS-Visit(G,2)



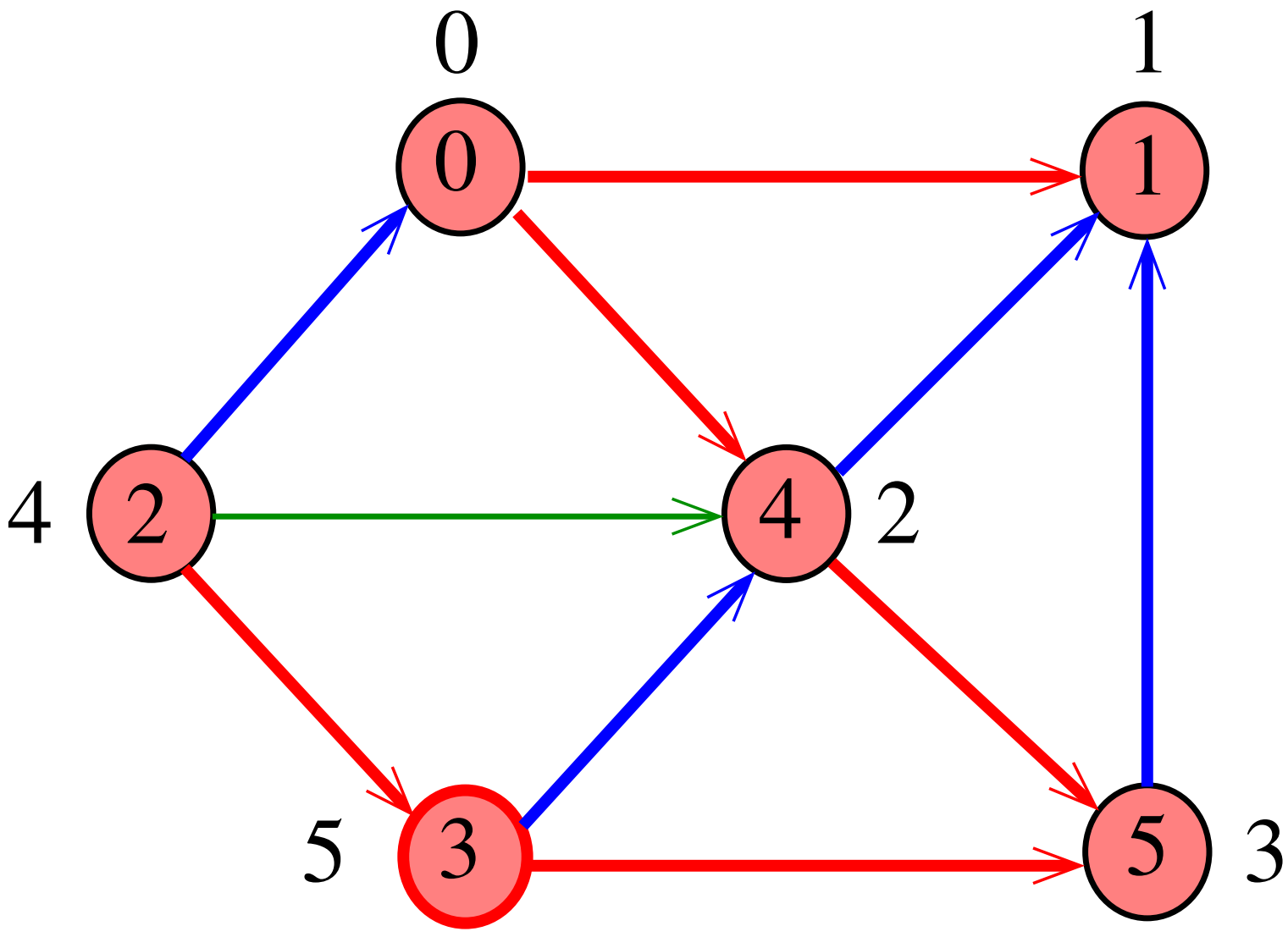
DFS-Visit(G,3)



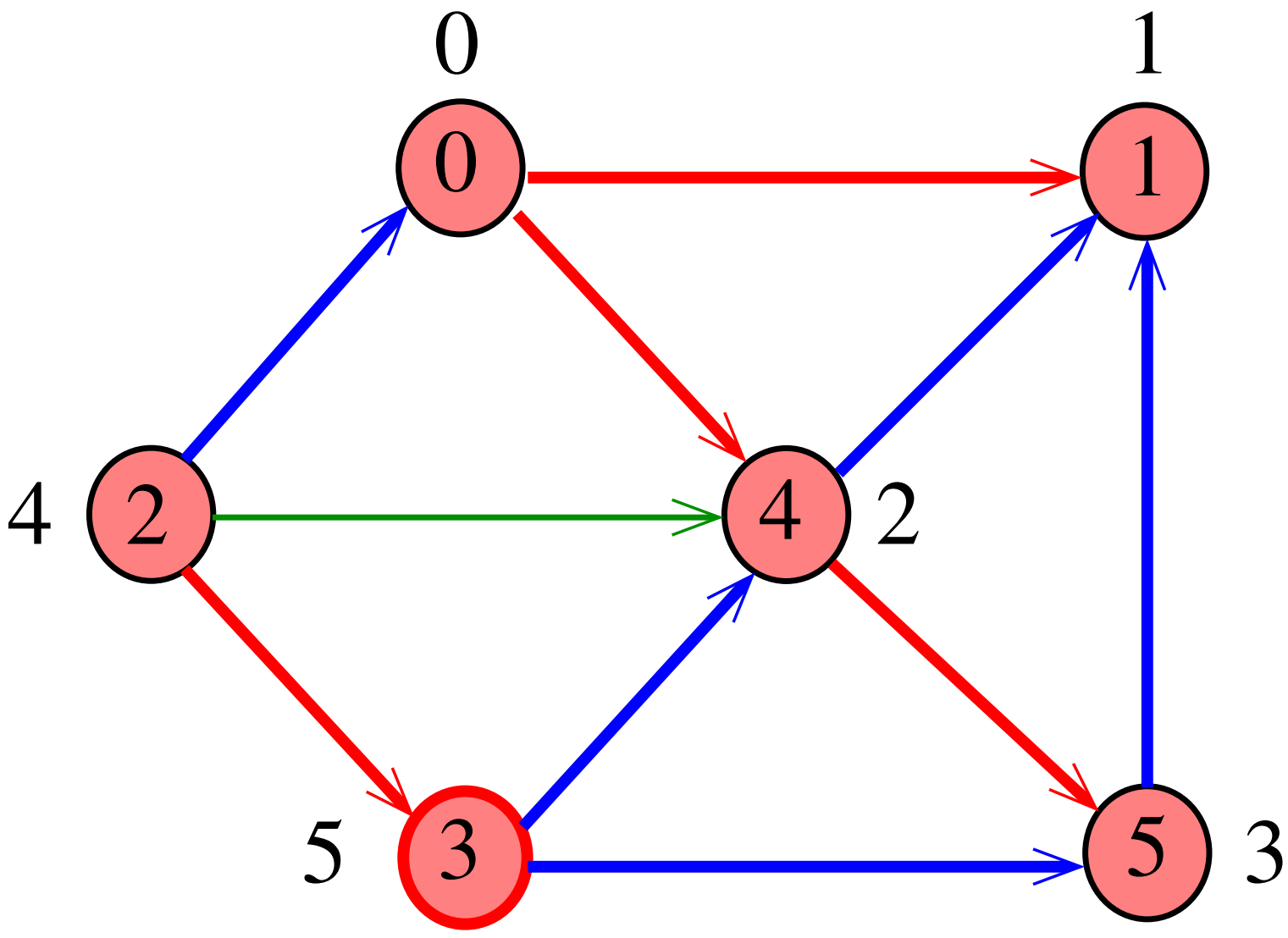
DFS-Visit(G,3)



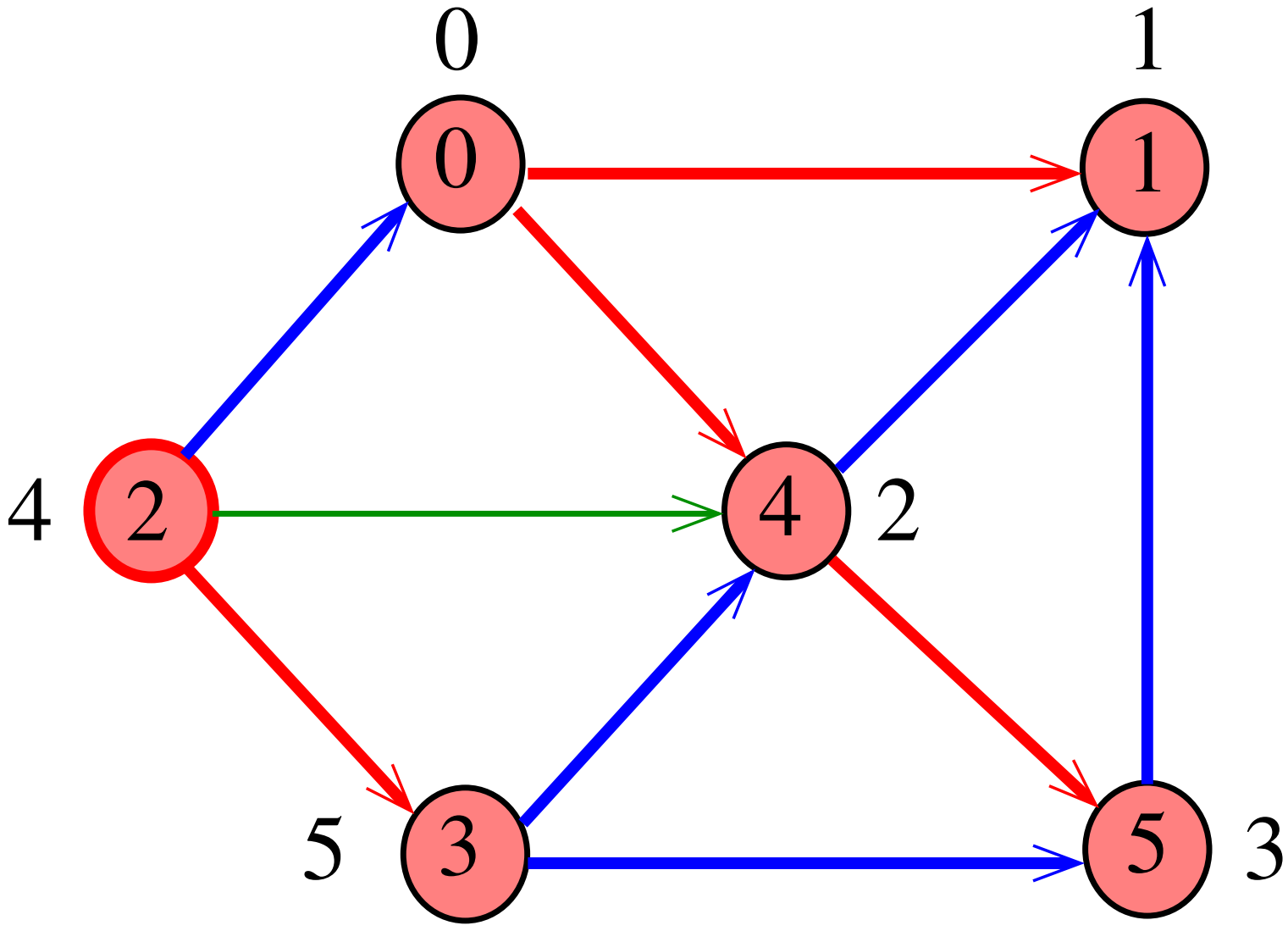
DFS-Visit(G,3)



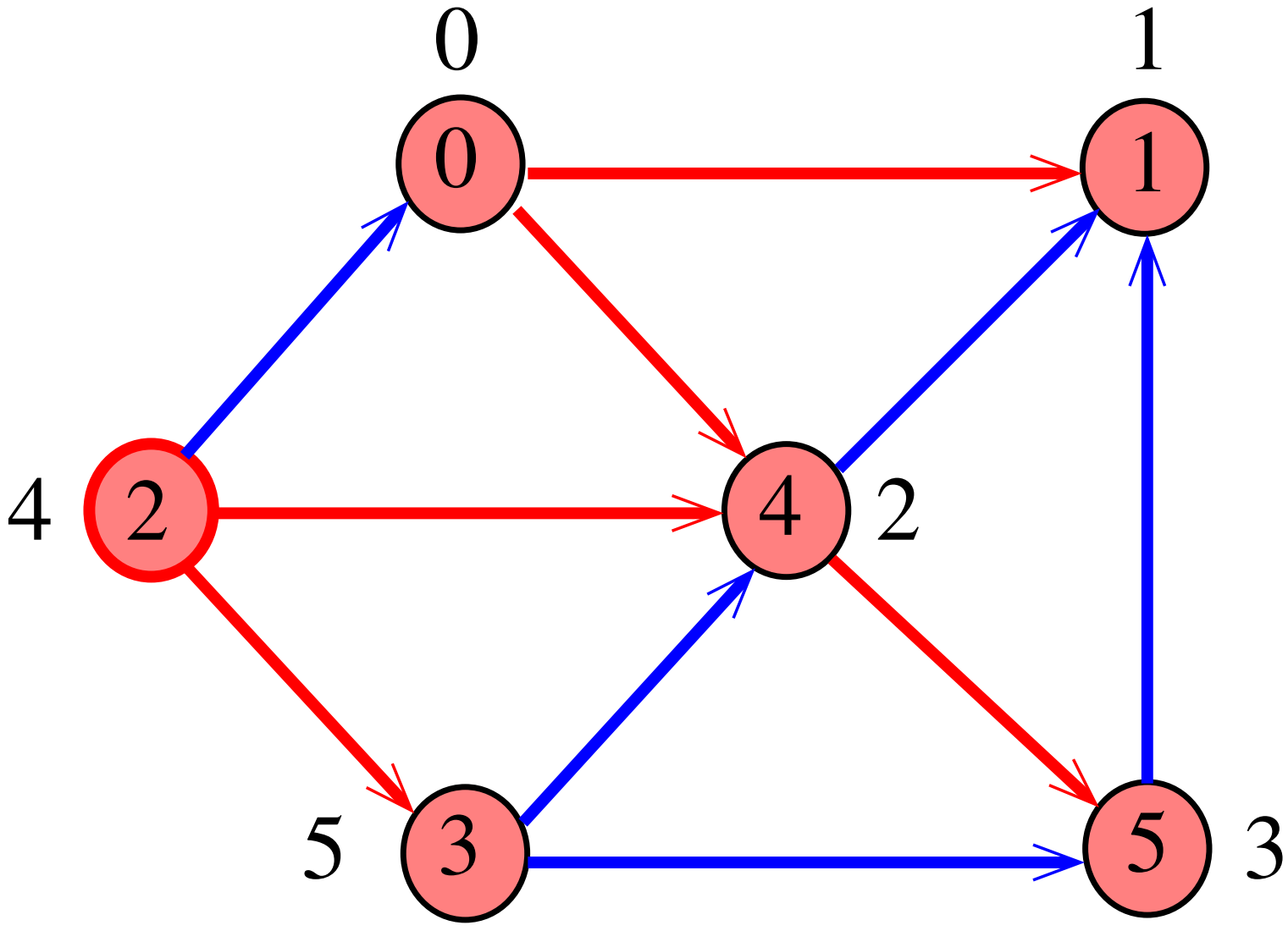
DFS-Visit(G,3)



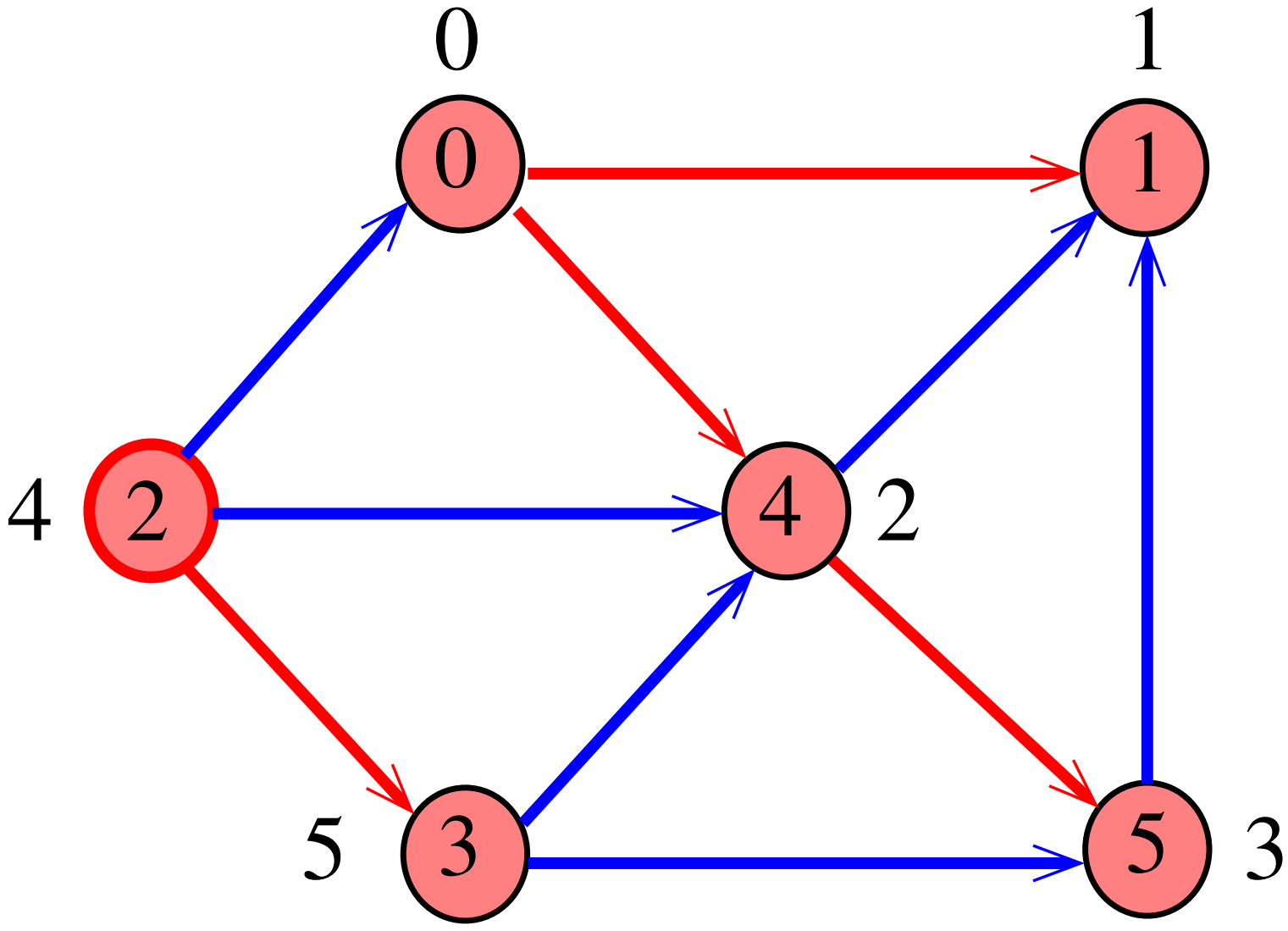
DFS-Visit(G,2)



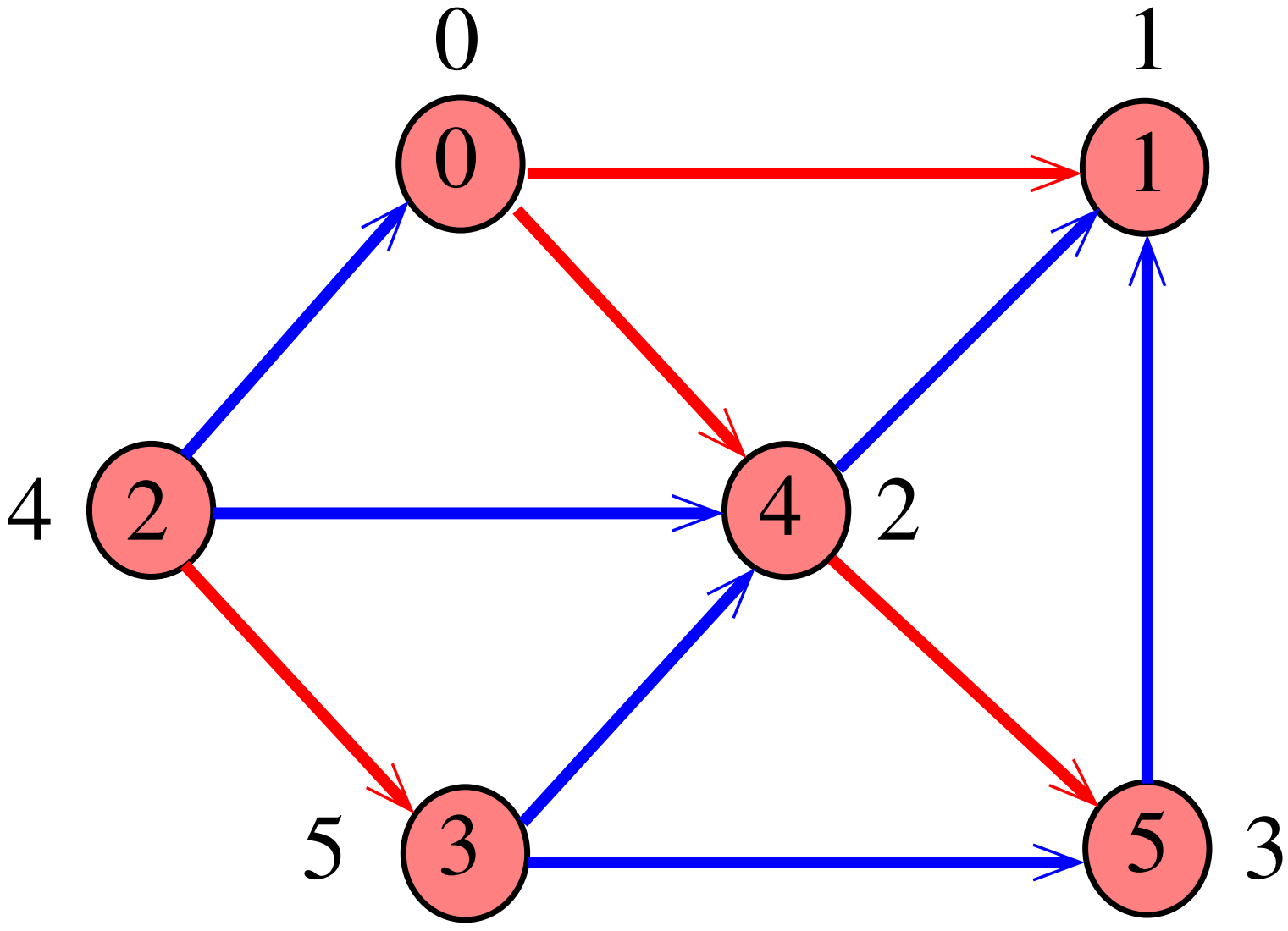
DFS-Visit(G,2)



DFS-Visit(G,2)



DFS(G)



Consumo de tempo

Cada vértice é descoberto uma única vez, pois é branco
e, ao ser descoberto, passa a ser cinzento, e depois preto.

Consumo de tempo

Cada vértice é descoberto uma única vez, pois é branco e, ao ser descoberto, passa a ser cinzento, e depois preto.

A lista de adjacência de cada vértice descoberto é percorrida **uma única vez**.

Consumo de tempo

Cada vértice é descoberto uma única vez, pois é branco e, ao ser descoberto, passa a ser cinzento, e depois preto.

A lista de adjacência de cada vértice descoberto é percorrida uma única vez.

Logo o consumo de tempo é $O(n + m)$, onde $n = |V|$ e $m = |E|$, pois a inicialização custa $\Theta(n)$ e a soma do tamanho das listas de adjacências percorridas é $O(m)$.

Consumo de tempo

Cada vértice é descoberto uma única vez, pois é branco e, ao ser descoberto, passa a ser cinzento, e depois preto.

A lista de adjacência de cada vértice descoberto é percorrida uma única vez.

Logo o consumo de tempo é $O(n + m)$, onde $n = |V|$ e $m = |E|$, pois a inicialização custa $\Theta(n)$ e a soma do tamanho das listas de adjacências percorridas é $O(m)$.

O consumo de tempo de uma DFS é linear no tamanho do grafo.

Propriedades da DFS de um grafo

Mesma estrutura que sequência válida de parênteses.

Propriedades da DFS de um grafo

Mesma estrutura que sequência válida de parênteses.

Teorema: *Para vértices u e v com $u.d < v.d$, exatamente uma das duas condições abaixo valem na floresta resultante:*

Propriedades da DFS de um grafo

Mesma estrutura que sequência válida de parênteses.

Teorema: *Para vértices u e v com $u.d < v.d$, exatamente uma das duas condições abaixo valem na floresta resultante:*

a) Os intervalos $[u.d, u.f]$ e $[v.d, v.f]$ são disjuntos, e nem u é descendente de v, nem v é descendente de u.

Propriedades da DFS de um grafo

Mesma estrutura que sequência válida de parênteses.

Teorema: *Para vértices u e v com $u.d < v.d$, exatamente uma das duas condições abaixo valem na floresta resultante:*

a) Os intervalos $[u.d, u.f]$ e $[v.d, v.f]$ são disjuntos, e nem u é descendente de v, nem v é descendente de u.

b) O intervalo $[v.d, v.f]$ está contido no intervalo $[u.d, u.f]$, e v é descendente de u.

Propriedades da DFS de um grafo

Mesma estrutura que sequência válida de parênteses.

Teorema: *Para vértices u e v com $u.d < v.d$, exatamente uma das duas condições abaixo valem na floresta resultante:*

a) Os intervalos $[u.d, u.f]$ e $[v.d, v.f]$ são disjuntos, e nem u é descendente de v, nem v é descendente de u.
b) O intervalo $[v.d, v.f]$ está contido no intervalo $[u.d, u.f]$, e v é descendente de u.

Corolário: *O vértice v é um descendente próprio do vértice u na floresta resultante da DFS sse $u.d < v.d < v.f < u.f$.*

Propriedades da DFS de um grafo

Mesma estrutura que sequência válida de parênteses.

Teorema: *Para vértices u e v com $u.d < v.d$, exatamente uma das duas condições abaixo valem na floresta resultante:*

a) Os intervalos $[u.d, u.f]$ e $[v.d, v.f]$ são disjuntos, e nem u é descendente de v, nem v é descendente de u.
b) O intervalo $[v.d, v.f]$ está contido no intervalo $[u.d, u.f]$, e v é descendente de u.

Corolário: *O vértice v é um descendente próprio do vértice u na floresta resultante da DFS sse $u.d < v.d < v.f < u.f$.*

Teorema (do caminho branco): *v é descendente de u sse, no momento $u.d$ em que u é descoberto, v pode ser alcançado de u por um caminho com apenas vértices brancos.*

Classificação das arestas

Quatro tipos de arestas derivadas de uma DFS:

Classificação das arestas

Quatro tipos de arestas derivadas de uma DFS:

a) Arestas da árvore: arestas da floresta DF.

Classificação das arestas

Quatro tipos de arestas derivadas de uma DFS:

a) Arestas da árvore: arestas da floresta DF.

b) Arestas de retorno: de um vértice para um ascendente na floresta DF.

Classificação das arestas

Quatro tipos de arestas derivadas de uma DFS:

a) Arestas da árvore: arestas da floresta DF.

b) Arestas de retorno: de um vértice para um ascendente na floresta DF.

c) Arestas de avanço: de um vértice para um descendente na floresta DF.

Classificação das arestas

Quatro tipos de arestas derivadas de uma DFS:

a) Arestas da árvore: arestas da floresta DF.

b) Arestas de retorno: de um vértice para um ascendente na floresta DF.

c) Arestas de avanço: de um vértice para um descendente na floresta DF.

d) Arestas cruzadas: **todas as outras arestas.**

Classificação das arestas

Quatro tipos de arestas derivadas de uma DFS:

a) Arestas da árvore: arestas da floresta DF.

b) Arestas de retorno: de um vértice para um ascendente na floresta DF.

c) Arestas de avanço: de um vértice para um descendente na floresta DF.

d) Arestas cruzadas: todas as outras arestas.

Teorema: *Se o grafo não é dirigido, então só há arestas da árvore e arestas de retorno.*

Classificação das arestas

Quatro tipos de arestas derivadas de uma DFS:

a) Arestas da árvore: arestas da floresta DF.

b) Arestas de retorno: de um vértice para um ascendente na floresta DF.

c) Arestas de avanço: de um vértice para um descendente na floresta DF.

d) Arestas cruzadas: todas as outras arestas.

Teorema: *Se o grafo não é dirigido, então só há arestas da árvore e arestas de retorno.*

Aplicação: ordenação topológica.

Ordenação topológica

Digrafo $G = (V, A)$

Ordenação topológica: Ordenação total de V
em que u vem antes de v sempre que $(u, v) \in A$.
Geralmente expressa como uma numeração de V.

Ordenação topológica

Digrafo $G = (V, A)$

Ordenação topológica: Ordenação total de V
em que u vem antes de v sempre que $(u, v) \in A$.
Geralmente expressa como uma numeração de V.

Digrafo G é acíclico se não tem circuito dirigido.

Problema: Dado digrafo G acíclico,
encontrar uma ordenação topológica de G.

Ordenação topológica

Digrafo $G = (V, A)$

Ordenação topológica: Ordenação total de V
em que u vem antes de v sempre que $(u, v) \in A$.
Geralmente expressa como uma numeração de V.

Digrafo G é acíclico se não tem circuito dirigido.

Problema: Dado digrafo G acíclico,
encontrar uma ordenação topológica de G.

Algoritmo:

Execute uma DFS no grafo calculando $u.f$ para cada u.

Ordenação topológica

Digrafo $G = (V, A)$

Ordenação topológica: Ordenação total de V
em que u vem antes de v sempre que $(u, v) \in A$.
Geralmente expressa como uma numeração de V.

Digrafo G é acíclico se não tem circuito dirigido.

Problema: Dado digrafo G acíclico,
encontrar uma ordenação topológica de G.

Algoritmo:

Execute uma DFS no grafo calculando $u.f$ para cada u.

Ao terminar um vértice, insira-o no início de uma lista ligada.

Ordenação topológica

Digrafo $G = (V, A)$

Ordenação topológica: Ordenação total de V
em que u vem antes de v sempre que $(u, v) \in A$.
Geralmente expressa como uma numeração de V.

Digrafo G é acíclico se não tem circuito dirigido.

Problema: Dado digrafo G acíclico,
encontrar uma ordenação topológica de G.

Algoritmo:

Execute uma DFS no grafo calculando $u.f$ para cada u.

Ao terminar um vértice, insira-o no início de uma lista ligada.

Devolva a lista ligada.

Ordenação topológica

Problema: Dado digrafo G acíclico,
encontrar uma ordenação topológica de G.

Algoritmo:

Execute uma DFS no grafo calculando $u.f$ para cada u.

Ao terminar um vértice, insira-o no início de uma lista ligada.

Devolva a lista ligada.

Ordenação topológica

Problema: Dado digrafo G acíclico,
encontrar uma ordenação topológica de G.

Algoritmo:

Execute uma DFS no grafo calculando $u.f$ para cada u.

Ao terminar um vértice, insira-o no início de uma lista ligada.

Devolva a lista ligada.

Consumo de tempo: linear no tamanho do grafo

Ordenação topológica

Problema: Dado digrafo G acíclico,
encontrar uma ordenação topológica de G.

Algoritmo:

Execute uma DFS no grafo calculando $u.f$ para cada u.

Ao terminar um vértice, insira-o no início de uma lista ligada.

Devolva a lista ligada.

Consumo de tempo: linear no tamanho do grafo

Lema: Um digrafo é acíclico sse
a DFS não detecta nenhuma aresta de retorno.

Ordenação topológica

Problema: Dado digrafo G acíclico,
encontrar uma ordenação topológica de G.

Algoritmo:

Execute uma DFS no grafo calculando $u.f$ para cada u.

Ao terminar um vértice, insira-o no início de uma lista ligada.

Devolva a lista ligada.

Consumo de tempo: linear no tamanho do grafo

Lema: Um digrafo é acíclico sse
a DFS não detecta nenhuma aresta de retorno.

Teorema: O algoritmo acima calcula
uma ordenação topológica do grafo.