Complexidade computacional

Classifica os problemas em relação à
dificuldade de resolvê-los algoritmicamente.

CLRS 34

Classes P, NP e co-NP

Por algoritmo eficiente entende-se um algoritmo polinomial.

Classes P, NP e co-NP

Por algoritmo eficiente entende-se um algoritmo polinomial.

Classe P:
classe de todos os problemas de decisão que podem ser resolvidos por algoritmos polinomiais.

Classes P, NP e co-NP

Por algoritmo eficiente entende-se um algoritmo polinomial.

Classe P:
classe de todos os problemas de decisão que podem ser resolvidos por algoritmos polinomiais.

Classe NP:
classe de todos os problemas de decisão que possuem um verificador polinomial para a resposta SIM

Classes P, NP e co-NP

Por algoritmo eficiente entende-se um algoritmo polinomial.

Classe P:
classe de todos os problemas de decisão que podem ser resolvidos por algoritmos polinomiais.

Classe NP:
classe de todos os problemas de decisão que possuem um verificador polinomial para a resposta SIM

Classe co-NP:
classe de todos os problemas de decisão que possuem um verificador polinomial para a resposta NÃO

Verificador polinomial para SIM

Um verificador polinomial para a resposta SIM a um problema Π é um algoritmo polinomial ALG que recebe

> *uma instância I de Π e um objeto C,*
> *tal que $\langle C \rangle$ é $\mathrm{O}(\langle I \rangle^{\alpha})$ para alguma constante α*

Verificador polinomial para SIM

Um verificador polinomial para a resposta SIM a um problema Π é um algoritmo polinomial ALG que recebe

uma instância I de Π e um objeto C,
tal que $\langle C\rangle$ é $\mathrm{O}(\langle I\rangle^{\alpha})$ para alguma constante α

e devolve

SIM *para algum C se a resposta a $\Pi(I)$ é* SIM;
NÃO *para todo C se a resposta a $\Pi(I)$ é* NÃO.

Verificador polinomial para SIM

Um verificador polinomial para a resposta SIM a um problema Π é um algoritmo polinomial ALG que recebe

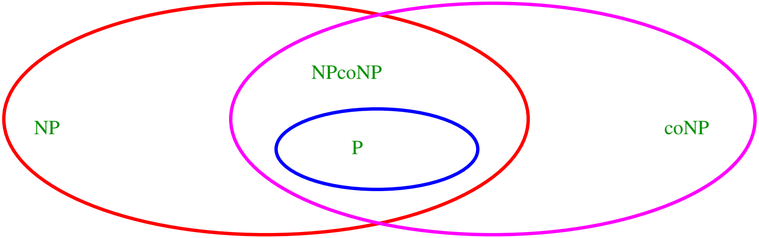
uma instância I de Π e um objeto C,
tal que $\langle C \rangle$ é $\mathrm{O}(\langle I \rangle^{\alpha})$ para alguma constante α

e devolve

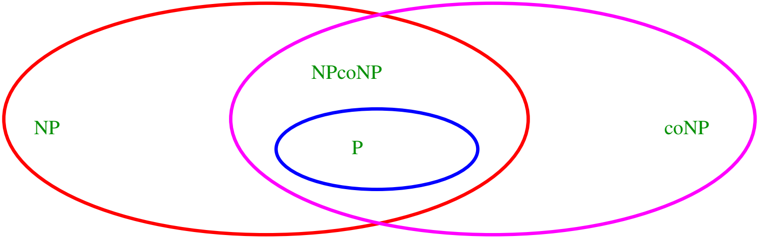
SIM *para algum C se a resposta a $\Pi(I)$ é* SIM*;*
NÃO *para todo C se a resposta a $\Pi(I)$ é* NÃO.

No caso de resposta SIM, o objeto C é dito um certificado polinomial ou certificado curto da resposta SIM a $\Pi(I)$.

P, NP e co-NP



P, NP e co-NP



P $\neq$ NP?

NP $\cap$ co-NP $\neq$ P?

NP $\neq$ co-NP?

Redução polinomial

Permite comparar
o "grau de complexidade" de problemas diferentes.

Redução polinomial

Permite comparar
o "grau de complexidade" de problemas diferentes.

Π, Π': problemas

Uma redução de Π a Π' é um algoritmo ALG que resolve Π usando uma subrotina hipotética ALG′ que resolve Π', de forma que, se ALG′ é um algoritmo polinomial, então ALG é um algoritmo polinomial.

Redução polinomial

Permite comparar
o "grau de complexidade" de problemas diferentes.

Π, Π': problemas

Uma redução de Π a Π' é um algoritmo ALG que resolve Π usando uma subrotina hipotética ALG$'$ que resolve Π', de forma que, se ALG$'$ é um algoritmo polinomial, então ALG é um algoritmo polinomial.

$\Pi \prec_P \Pi'$ $=$ existe uma redução de Π a Π'.

Se $\Pi \prec_P \Pi'$ e Π' está em P, então Π está em P.

Exemplo

Π = encontrar um ciclo hamiltoniano

Π' = existe um ciclo hamiltoniano?

Exemplo

Π = encontrar um ciclo hamiltoniano
Π' = existe um ciclo hamiltoniano?

Redução de Π a Π': ALG$'$ é um algoritmo que resolve Π'

ALG (G)
    se ALG$'(G)$ = NÃO
        então devolva "G não é hamiltoniano"
    para cada aresta uv de G **faça**
        $H \leftarrow G - uv$
        se ALG$'(H)$ = SIM
            então $G \leftarrow G - uv$
    devolva G

Exemplo

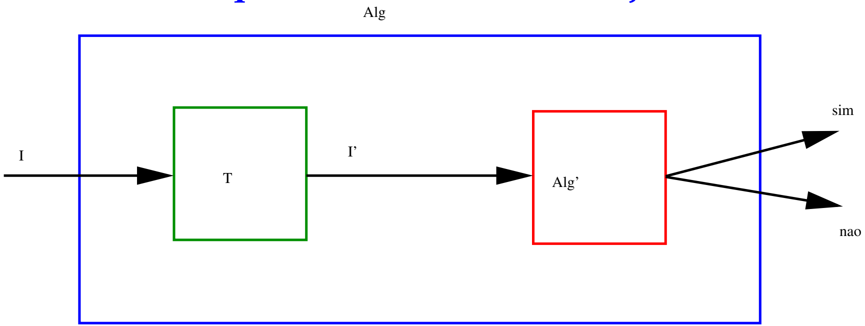
Π = encontrar um ciclo hamiltoniano
Π' = existe um ciclo hamiltoniano?

Redução de Π a Π': ALG$'$ é um algoritmo que resolve Π'

ALG (G)
1 **se** ALG$'(G)$ = NÃO
2 **então devolva** "G não é hamiltoniano"
3 **para cada** aresta uv de G **faça**
4 $H \leftarrow G - uv$
5 **se** ALG$'(H)$ = SIM
6 **então** $G \leftarrow G - uv$
7 **devolva** G

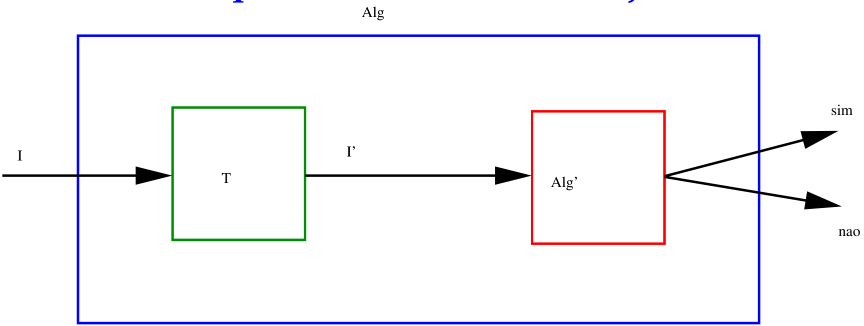
Se ALG$'$ consome tempo $\mathrm{O}(p(n))$, então ALG consome tempo $\mathrm{O}(m\, p(\langle G \rangle))$, onde m = número de arestas de G.

Esquema comum de redução



Faz apenas uma chamada ao algoritmo ALG′.

Esquema comum de redução

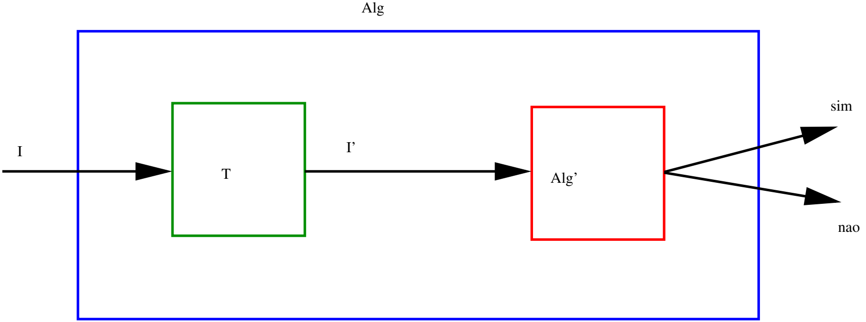


Faz apenas uma chamada ao algoritmo ALG′.

T transforma uma instância I de Π em uma instância $I' = T(I)$ de Π' tal que

$$\Pi(I) = \text{SIM se e somente se } \Pi'(I') = \text{SIM}$$

Esquema comum de redução



Faz apenas uma chamada ao algoritmo ALG$'$.

T transforma uma instância I de Π em uma instância $I' = T(I)$ de Π' tal que

$$\Pi(I) = \text{SIM se e somente se } \Pi'(I') = \text{SIM}$$

T é uma espécie de "filtro" ou "compilador".

Satisfatibilidade

Problema: Dada uma fórmula booleana ϕ nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$, existe uma atribuição

$$t : \{x_1, \ldots, x_n\} \rightarrow \{\text{VERDADE}, \text{FALSO}\}$$

que torna ϕ verdadeira?

Satisfatibilidade

Problema: Dada uma fórmula booleana ϕ nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$, existe uma atribuição

$$t : \{x_1, \ldots, x_n\} \to \{\text{VERDADE}, \text{FALSO}\}$$

que torna ϕ verdadeira?

Exemplo:

$$\phi = (x_1) \land (\neg x_1 \lor \neg x_2 \lor x_3) \land (\neg x_3)$$

Satisfatibilidade

Problema: Dada uma fórmula booleana ϕ nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$, existe uma atribuição

$$t : \{x_1, \ldots, x_n\} \rightarrow \{\text{VERDADE}, \text{FALSO}\}$$

que torna ϕ verdadeira?

Exemplo:

$$\phi = (x_1) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_3)$$

Se $t(x_1) = \text{VERDADE}, t(x_2) = \text{FALSO}, t(x_3) = \text{FALSO}$, então $t(\phi) = \text{VERDADE}$

Satisfatibilidade

Problema: Dada uma fórmula booleana ϕ nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$, existe uma atribuição

$$t : \{x_1, \ldots, x_n\} \rightarrow \{\text{VERDADE}, \text{FALSO}\}$$

que torna ϕ verdadeira?

Exemplo:

$$\phi = (x_1) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_3)$$

Se $t(x_1) = \text{VERDADE}, t(x_2) = \text{FALSO}, t(x_3) = \text{FALSO}$, então $t(\phi) = \text{VERDADE}$

Se $t(x_1) = \text{VERDADE}, t(x_2) = \text{VERDADE}, t(x_3) = \text{FALSO}$, então $t(\phi) = \text{FALSO}$

Sistemas lineares 0-1

Problema: Dadas uma matriz A e um vetor b,

$$Ax \geq b$$

possui uma solução tal que $x_i = 0$ ou $x_i = 1$ para todo i?

Sistemas lineares 0-1

Problema: Dadas uma matriz A e um vetor b,

$$Ax \geq b$$

possui uma solução tal que $x_i = 0$ ou $x_i = 1$ para todo i?

Exemplo:

$$\begin{array}{rrrrrrrrr}
 & x_1 & & & & & \geq & 1 \\
- & x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \geq & -1 \\
 & & & & - & x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

tem uma solução 0-1?

Sistemas lineares 0-1

Problema: Dadas uma matriz A e um vetor b,

$$Ax \geq b$$

possui uma solução tal que $x_i = 0$ ou $x_i = 1$ para todo i?

Exemplo:

$$\begin{array}{rrrrrrrr} & x_1 & & & & & \geq & 1 \\ - & x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \geq & -1 \\ & & & & - & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

tem uma solução 0-1?

Sim! $x_1 = 1, x_2 = 0$ e $x_3 = 0$ é solução.

Exemplo 1

Satisfatibilidade $\prec_P$ Sistemas lineares 0-1

Exemplo 1

Satisfatibilidade $\prec_P$ Sistemas lineares 0-1

A transformação T recebe uma fórmula booleana ϕ

e devolve um sistema linear $Ax \geq b$

tal que ϕ é satisfatível se e somente se

o sistema $Ax \geq b$ admite uma solução 0-1.

Exemplo 1

Satisfatibilidade $<_P$ Sistemas lineares 0-1

A transformação T recebe uma fórmula booleana ϕ

e devolve um sistema linear $Ax \geq b$

tal que ϕ é satisfatível se e somente se

o sistema $Ax \geq b$ admite uma solução 0-1.

Exemplo:

$$\phi = (x_1) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_3)$$

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & & & & & \geq & 1 \\ 1 - x_1 & + & 1 - x_2 & + & x_3 & \geq & 1 \\ & & & & 1 - x_3 & \geq & 1 \end{array}$$

Exemplo 1

Satisfatibilidade $\prec_P$ Sistemas lineares 0-1

A transformação T recebe uma fórmula booleana ϕ
e devolve um sistema linear $Ax \geq b$
tal que ϕ é satisfatível se e somente se
o sistema $Ax \geq b$ admite uma solução 0-1.

Exemplo:

$$\phi = (x_1) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_3)$$

$$\begin{array}{rrrrrrrrr} & x_1 & & & & & \geq & 1 \\ - & x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \geq & -1 \\ & & & & - & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Exemplo 2

Verifique que

Ciclo hamiltoniano $\prec_P$ Caminho hamiltoniano entre u e v

Exemplo 2

Verifique que

Ciclo hamiltoniano $\prec_P$ Caminho hamiltoniano entre u e v

Verifique que

Caminho hamiltoniano entre u e v $\prec_P$ Caminho hamiltoniano

Exemplo 3

Caminho hamiltoniano $\prec_P$ Satisfatibilidade

Descreveremos um algoritmo polinomial T que recebe um grafo G e devolve uma fórmula booleana $\phi(G)$ tal que

$$G \text{ tem caminho hamiltoniano} \Leftrightarrow \phi(G) \text{ é satisfatível.}$$

Exemplo 3

Caminho hamiltoniano $\prec_P$ Satisfatibilidade

Descreveremos um algoritmo polinomial T que recebe um grafo G e devolve uma fórmula booleana $\phi(G)$ tal que

$$G \text{ tem caminho hamiltoniano} \Leftrightarrow \phi(G) \text{ é satisfatível.}$$

Suponha que G tem vértices $1, \ldots, n$.

$\phi(G)$ tem n^2 variáveis $x_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq n$.

Exemplo 3

Caminho hamiltoniano $\prec_P$ Satisfatibilidade

Descreveremos um algoritmo polinomial T que recebe um grafo G e devolve uma fórmula booleana $\phi(G)$ tal que

$$G \text{ tem caminho hamiltoniano} \Leftrightarrow \phi(G) \text{ é satisfatível.}$$

Suponha que G tem vértices $1, \ldots, n$.

$\phi(G)$ tem n^2 variáveis $x_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq n$.

Interpretação: $x_{i,j} = \text{VERDADE} \Leftrightarrow$ vértice j é o i-ésimo vértice do caminho.

Exemplo 3 (cont.)

Claúsulas de $\phi(G)$:

- vértice j faz parte do caminho:

$$(x_{1,j} \vee x_{2,j} \vee \cdots \vee x_{n,j})$$

para cada j (n claúsulas).

Exemplo 3 (cont.)

Claúsulas de $\phi(G)$:

- vértice j faz parte do caminho:

$$(x_{1,j} \vee x_{2,j} \vee \cdots \vee x_{n,j})$$

  para cada j (n claúsulas).

- vértice j não está em duas posições do caminho:

$$(\neg x_{i,j} \vee \neg x_{k,j})$$

  para cada j e $i \neq k$ ($\mathrm{O}(n^3)$ claúsulas).

Exemplo 3 (cont.)

Claúsulas de $\phi(G)$:

- vértice j faz parte do caminho:

$$(x_{1,j} \vee x_{2,j} \vee \cdots \vee x_{n,j})$$

  para cada j (n claúsulas).

- vértice j não está em duas posições do caminho:

$$(\neg x_{i,j} \vee \neg x_{k,j})$$

  para cada j e $i \neq k$ ($\mathrm{O}(n^3)$ claúsulas).

- algum vértice é o i-ésimo do caminho:

$$(x_{i,1} \vee x_{i,2} \vee \cdots \vee x_{i,n})$$

  para cada i (n claúsulas).

Exemplo 3 (cont.)

Mais claúsulas de $\phi(G)$:

- dois vértices não podem ser o i-ésimo:

$$(\neg x_{i,j} \vee \neg x_{i,k})$$

para cada i e $j \neq k$ ($\mathrm{O}(n^3)$ claúsulas).

Exemplo 3 (cont.)

Mais claúsulas de $\phi(G)$:

- dois vértices não podem ser o i-ésimo:

$$(\neg x_{i,j} \vee \neg x_{i,k})$$

  para cada i e $j \neq k$ ($\mathrm{O}(n^3)$ claúsulas).

- se ij não é aresta, j não pode seguir i no caminho:

$$(\neg x_{k,i} \vee \neg x_{k+1,j})$$

  para cada ij que não é aresta ($\mathrm{O}(n^3)$ claúsulas).

Exemplo 3 (cont.)

Mais claúsulas de $\phi(G)$:

- dois vértices não podem ser o i-ésimo:

  $$(\neg x_{i,j} \vee \neg x_{i,k})$$

  para cada i e $j \neq k$ ($\mathrm{O}(n^3)$ claúsulas).

- se ij não é aresta, j não pode seguir i no caminho:

  $$(\neg x_{k,i} \vee \neg x_{k+1,j})$$

  para cada ij que não é aresta ($\mathrm{O}(n^3)$ claúsulas).

A fórmula $\phi(G)$ tem $\mathrm{O}(n^3)$ claúsulas e
cada claúsula tem $\leq n$ literais. Logo, $\langle\phi(G)\rangle$ é $\mathrm{O}(n^4)$.

Exemplo 3 (cont.)

Mais claúsulas de $\phi(G)$:

- dois vértices não podem ser o i-ésimo:

$$(\neg x_{i,j} \vee \neg x_{i,k})$$

  para cada i e $j \neq k$ ($\mathrm{O}(n^3)$ claúsulas).

- se ij não é aresta, j não pode seguir i no caminho:

$$(\neg x_{k,i} \vee \neg x_{k+1,j})$$

  para cada ij que não é aresta ($\mathrm{O}(n^3)$ claúsulas).

A fórmula $\phi(G)$ tem $\mathrm{O}(n^3)$ claúsulas e
cada claúsula tem $\leq n$ literais. Logo, $\langle\phi(G)\rangle$ é $\mathrm{O}(n^4)$.

Não é difícil projetar o algoritmo polinomial T.

Exemplo 3 (cont.)

$\phi(G)$ satisfatível $\Rightarrow$ G tem caminho hamiltoniano.

Prova: Seja $t : \{\text{variáveis}\} \rightarrow \{\text{VERDADE}, \text{FALSO}\}$
tal que $t(\phi(G)) = \text{VERDADE}$.

Exemplo 3 (cont.)

$\phi(G)$ satisfatível $\Rightarrow$ G tem caminho hamiltoniano.

Prova: Seja $t : \{\text{variáveis}\} \to \{\text{VERDADE}, \text{FALSO}\}$ tal que $t(\phi(G)) = \text{VERDADE}$.

Para cada i, existe um único j tal que $t(x_{i,j}) = \text{VERDADE}$.

Exemplo 3 (cont.)

$\phi(G)$ satisfatível $\Rightarrow$ G tem caminho hamiltoniano.

Prova: Seja t : {variáveis} $\rightarrow$ {VERDADE, FALSO} tal que $t(\phi(G)) =$ VERDADE.

Para cada i, existe um único j tal que $t(x_{i,j}) =$ VERDADE. Logo, t é a codificação de uma permutação

$$\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n)$$

dos vértices de G, onde

$$\pi(i) = j \Leftrightarrow t(x_{i,j}) = \text{VERDADE}.$$

Exemplo 3 (cont.)

$\phi(G)$ satisfatível $\Rightarrow$ G tem caminho hamiltoniano.

Prova: Seja $t : \{\text{variáveis}\} \rightarrow \{\text{VERDADE}, \text{FALSO}\}$ tal que $t(\phi(G)) = \text{VERDADE}$.

Para cada i, existe um único j tal que $t(x_{i,j}) = \text{VERDADE}$. Logo, t é a codificação de uma permutação

$$\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n)$$

dos vértices de G, onde

$$\pi(i) = j \Leftrightarrow t(x_{i,j}) = \text{VERDADE}.$$

Para cada k, $(\pi(k), \pi(k+1))$ é uma aresta de G.

Exemplo 3 (cont.)

$\phi(G)$ satisfatível $\Rightarrow$ G tem caminho hamiltoniano.

Prova: Seja $t : \{\text{variáveis}\} \to \{\text{VERDADE}, \text{FALSO}\}$ tal que $t(\phi(G)) = \text{VERDADE}$.

Para cada i, existe um único j tal que $t(x_{i,j}) = \text{VERDADE}$.
Logo, t é a codificação de uma permutação

$$\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n)$$

dos vértices de G, onde

$$\pi(i) = j \Leftrightarrow t(x_{i,j}) = \text{VERDADE}.$$

Para cada k, $(\pi(k), \pi(k+1))$ é uma aresta de G.

Logo, $(\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n))$ é um caminho hamiltoniano.

Exemplo 3 (cont.)

G tem caminho hamiltoniano $\Rightarrow \phi(G)$ satisfatível.

Suponha que $(\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n))$ é um caminho hamiltoniano, onde π é uma permutação dos vértices de G.

Exemplo 3 (cont.)

G tem caminho hamiltoniano $\Rightarrow \phi(G)$ satisfatível.

Suponha que $(\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n))$ é um caminho hamiltoniano, onde π é uma permutação dos vértices de G.

Então

$$t(x_{i,j}) = \text{VERDADE} \; se \; \pi(i) = j \; e$$

$$t(x_{i,j}) = \text{FALSO} \; se \; \pi(i) \neq j,$$

é uma atribuição de valores que satisfaz todas as claúsulas de $\phi(G)$.

Problemas completos em NP

Um problema Π em NP é NP-completo
se cada problema em NP pode ser reduzido a Π.

Problemas completos em NP

Um problema Π em NP é NP-completo
se cada problema em NP pode ser reduzido a Π.

Teorema de S. Cook e L.A. Levin: Satisfatibilidade é NP-completo.

Problemas completos em NP

Um problema Π em NP é NP-completo
se cada problema em NP pode ser reduzido a Π.

Teorema de S. Cook e L.A. Levin:
Satisfatibilidade é NP-completo.

Se $\Pi \prec_P \Pi'$ e Π é NP-completo, então Π' é NP-completo.

Problemas completos em NP

Um problema Π em NP é NP-completo
se cada problema em NP pode ser reduzido a Π.

Teorema de S. Cook e L.A. Levin:
Satisfatibilidade é NP-completo.

Se $\Pi \prec_P \Pi'$ e Π é NP-completo, então Π' é NP-completo.

Existe um algoritmo polinomial para um problema NP-completo se e somente se $P = NP$.