Redução polinomial

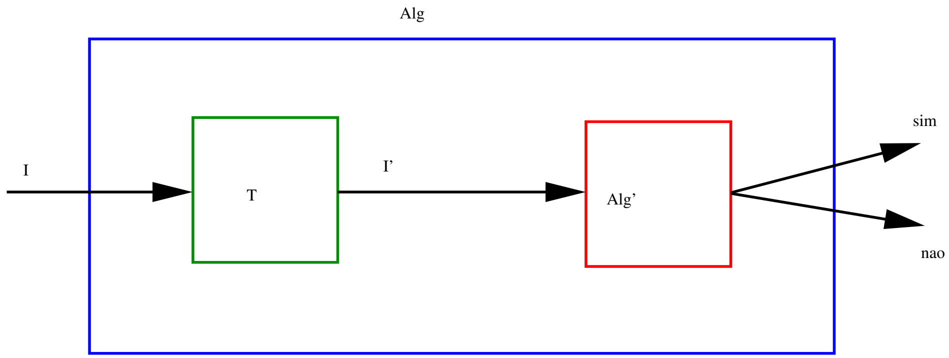
Permite comparar
o "grau de complexidade" de problemas diferentes.

Π, Π': problemas

Redução de Π a Π':
algoritmo ALG que resolve Π usando uma subrotina hipotética ALG$'$ que resolve Π', de forma que... Redução de Π a Π':
algoritmo ALG que resolve Π usando uma subrotina hipotética ALG$'$ que resolve Π', de forma que,
se ALG$'$ é polinomial, então ALG é um algoritmo polinomial.

$\Pi \prec_P \Pi'$ $=$ existe uma redução de Π a Π'.

Esquema comum de redução



Faz apenas uma chamada ao algoritmo ALG$'$.

T transforma uma instância I de Π em uma instância $I' = T(I)$ de Π' tal que

$$\Pi(I) = \text{SIM se e somente se } \Pi'(I') = \text{SIM}$$

Satisfatibilidade

Problema: Dada uma fórmula booleana ϕ nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$, existe uma atribuição

$$t : \{x_1, \ldots, x_n\} \rightarrow \{\text{VERDADE}, \text{FALSO}\}$$

que torna ϕ verdadeira?

Exemplo: $\phi = (x_1) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_3)$.

Um literal é uma variável x ou sua negação $\neg x$.

3-Satisfatibilidade

Problema: Dada uma fórmula booleana ϕ nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$ em que cada cláusula tem exatamente 3 literais, existe uma atribuição

$$t : \{x_1, \ldots, x_n\} \rightarrow \{\text{VERDADE}, \text{FALSO}\}$$

que torna ϕ verdadeira?

Exemplo:

$$\phi = (x_1 \vee \neg x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_3 \vee x_2 \vee x_4) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4)$$

Exemplo 4

Satisfatibilidade $<_P$ 3-Satisfatibilidade

Descreveremos um algoritmo polinomial T que recebe uma fórmula booleana ϕ e devolve uma fórmula booleana ϕ' com exatamente 3 literais por cláusula tal que

$$\phi \text{ é satisfatível} \Leftrightarrow \phi' \text{ é satisfatível.}$$

A transformação consiste em substituir cada cláusula de ϕ por uma coleção de cláusulas com exatamente 3 literais cada, e equivalente a ϕ.

Exemplo 4 (cont.)

Seja $(l_1 \vee l_2 \vee \cdots \vee l_k)$ uma cláusula de ϕ.

Caso 1. $k = 1$

Troque (l_1) por

$$(l_1 \vee y_1 \vee y_2)(l_1 \vee \neg y_1 \vee y_2)(l_1 \vee y_1 \vee \neg y_2)(l_1 \vee \neg y_1 \vee \neg y_2)$$

onde y_1 e y_2 são variáveis novas.

Caso 2. $k = 2$

Troque $(l_1 \vee l_2)$ por $(l_1 \vee l_2 \vee y)(l_1 \vee l_2 \vee \neg y)$,
onde y é uma variável nova.

Caso 3. $k = 3$

Mantenha $(l_1 \vee l_2 \vee l_3)$.

Exemplo 4 (cont.)

Caso 4. $k > 3$

Troque $(l_1 \vee l_2 \vee \cdots \vee l_k)$ por

$(l_1 \vee l_2 \vee y_1)$

$(\neg y_1 \vee l_3 \vee y_2)(\neg y_2 \vee l_4 \vee y_3)(\neg y_3 \vee l_5 \vee y_4)\ldots$

$(\neg y_{k-3} \vee l_{k-1} \vee l_k)$

onde $y_1, y_2, \ldots, y_{k-3}$ são variáveis novas.

Verifique que ϕ é satisfátivel $\Leftrightarrow$ nova fórmula é satisfatível.

O tamanho da nova cláusula é $O(m)$, onde m é o número de literais que ocorrem em ϕ (contando-se as repetições).

Problemas completos em NP

Um problema Π em NP é NP-completo
se cada problema em NP pode ser reduzido a Π.

> Teorema de S. Cook e L.A. Levin:
> Satisfatibilidade é NP-completo.

Se $\Pi <_P \Pi'$ e Π é NP-completo, então Π' é NP-completo.

Existe um algoritmo polinomial para um problema NP-completo se e somente se $P = NP$.

Demonstração de NP-completude

Para demonstrar que um problema Π' é NP-completo podemos utilizar o Teorema de Cook e Levin.

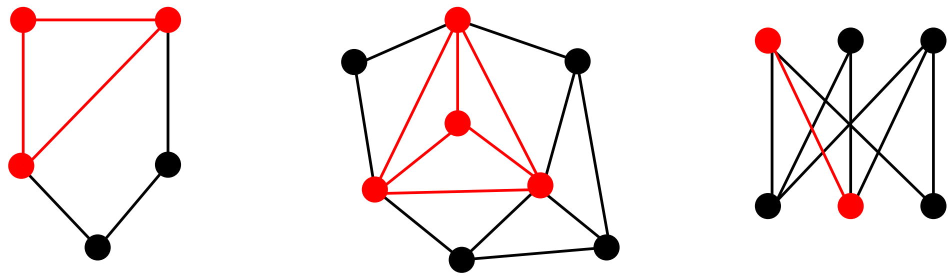
Para isto devemos:

- Demonstrar que Π' está em NP.
- Escolher um problema Π sabidamente NP-completo.
- Demonstrar que $\Pi \prec_P \Pi'$.

Clique

Problema: Dado um grafo G e um inteiro k, G possui um clique com $\geq k$ vértices?

Exemplos:



clique com k vértices $=$ subgrafo completo com k vértices

Clique é NP-completo

Clique está em NP e 3-Satisfatibilidade $\prec_P$ Clique.

Descreveremos um algoritmo polinomial T que recebe uma fórmula booleana ϕ com k cláusulas e exatamente 3 literais por cláusula e devolve um grafo G tais que

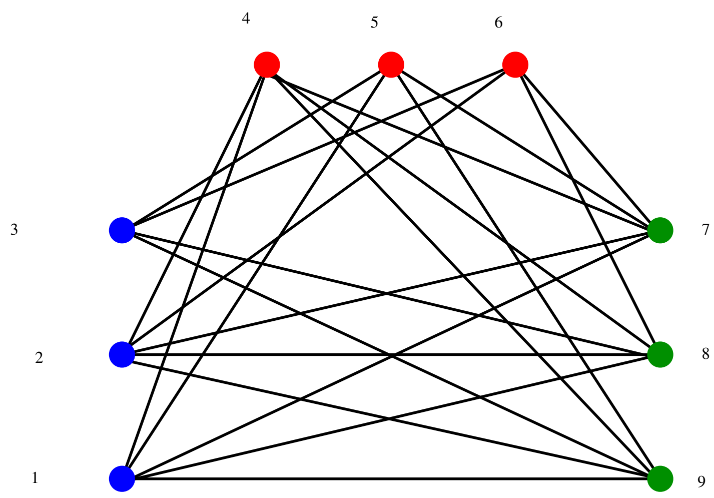
$$\phi \text{ é satisfatível} \Leftrightarrow G \text{ possui um clique} \geq k.$$

Para cada cláusula, o grafo G terá três vértices, um correspondente a cada literal da cláusula. Logo, G terá $3k$ vértices. Teremos uma aresta ligando vértices u e v se

- u e v são vértices que correspondem a literais em diferentes cláusulas; e
- se u corresponde a um literal x então v não corresponde ao literal $\neg x$.

Clique é NP-completo (cont.)

$$\phi = (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$$



Cobertura por vértices

Um conjunto S de vértices de um grafo G é uma cobertura se toda aresta de G tem uma ponta em S.

Problema: Dado um grafo G e um inteiro k, G possui uma cobertura com $\leq k$ vértices?

Você consegue provar que este problema é NP-completo?

Problemas NP-difíceis

Um problema Π, não necessariamente em NP, é NP-díficil se a existência de um algoritmo polinomial para Π implica que $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$.

Todo problema NP-completo é NP-difícil.

Exemplos:

- Encontrar um ciclo hamiltoniano é NP-difícil, mas não é NP-completo, pois não é um problema de decisão e portanto não está em NP.
- Satisfabilidade é NP-completo e NP-difícil.

Mais problemas NP-difíceis

Os seguintes problema são NP-difíceis:

- mochila booleana
- caminho máximo
- caminho hamiltoniano
- escalonamento de tarefas
- subset-sum
- clique máximo
- cobertura por vértices
- sistemas 0-1

e mais um montão deles ...

Um problema limítrofe

GRAPH ISOMORPHISM: *Dados dois grafos, eles são isomorfos?*

Na prática, bem resolvido: o programa NAUTY (B. McKay).

Note que SUBGRAPH ISOMORPHISM (dados G e H, G tem subgrafo isomorfo a H?) é NP-completo.