Regra de L´Hôpital para indeterminações em limites

1a. Regra de L′ Hôpital: (indeterminação ″ tipo $\frac{0}{0}$ ″)

• Sejam f e g funções deriváveis no intervalo $]\, p-r,\ p+r[\, = I$, $(r>0)$, e $x \neq p$.
• Suponha que $g'(x) \neq 0$, para todo $x \in I$, $x \neq p$.
• Suponha que $\lim\limits_{x\to p} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to p} g(x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to p} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existe (finito ou infinito).

Então o $\lim\limits_{x\to p} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ **existe** e $\lim\limits_{x\to p} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to p} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Observ: A 1a. Regra de L′ Hôpital continua válida se substituirmos o símbolo $x \to p$ por ou $x \to p^+$, ou $x \to p^-$, ou $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$ (adaptando também o intervalo I em cada um dos casos).

2a. Regra de L′ Hôpital: (indeterminação " tipo $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ ″)

• Sejam f e g funções deriváveis no intervalo $]\, p-r,\ p+r[\, = I$, $(r>0)$, e $x \neq p$.
• Suponha que $g'(x) \neq 0$, para todo $x \in I$, $x \neq p$.
• Suponha que $\lim\limits_{x\to p} f(x) = \begin{cases} +\infty \\ \text{ou} \\ -\infty \end{cases}$, $\lim\limits_{x\to p} g(x) = \begin{cases} +\infty \\ \text{ou} \\ -\infty \end{cases}$ e que $\lim\limits_{x\to p} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existe (finito ou infinito).

Então o $\lim\limits_{x\to p} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ **existe** e $\lim\limits_{x\to p} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to p} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Observ: A 2a. Regra de L′ Hôpital continua válida se o símbolo $x \to p$ for substituído por um dos símbolos: ou $x \to p^-$, ou $x \to p^+$, ou $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$ (adaptando-se o correspondente intervalo).