1a. Lista de Exercícios de MAT 3110

BMAC - IME - 1o. sem. 2013 - Turma 54

Profa. Maria Izabel Ramalho Martins

I. Sobre limites

1. Calcule os seguintes limites, caso existam, **justificando seu cálculo**:

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x}{x-2}$ 2. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x-2}{x-1}$ 3. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-1}{|x-1|}$

4. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{|x-1|}$ 5. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{2x^3+9x^2+12x+4}{-x^3-2x^2+4x+8}$ 6. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{3}}{x-3}$

7. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{\sqrt{x^2+16}-5}{x^2+3x}$ 8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[5]{x^4+1}-1}{x^4}$ 9. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^4+x^2}}{x}$

10. $\lim\limits_{u\to 2} \dfrac{\sqrt{u^2+12}-4}{2-\sqrt{u^3-4}}$ 11. $\lim\limits_{t\to -1} \dfrac{\sqrt[5]{t}+1}{t+1}$ 12. $\lim\limits_{x\to \sqrt{5}} \dfrac{2-\sqrt{x^2-1}}{x^2-2}$

13. $\lim\limits_{x\to \sqrt{5}} \dfrac{2-\sqrt{x^2-1}}{x^2-5}$ 14. $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$ 15. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^3+x^2-5x+3}}{x^2-1}$

2. Calcule os seguintes limites, caso existam, **justificando seu cálculo**:

1. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2-x+5x^2-5x^5}{2x^3-2x^2+5}$ 2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{5x^6+7x^4+7}}{x^4-2}$ 3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{9x+1}{2x+1}$

4. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right)$ 5. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}-\dfrac{b}{a}x\right)$ $(a,b>0)$

6. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3x^5+2x^2-4}{\sqrt{x^6+x+7}}$ 7. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^4+1}\right)$ 8. $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x+2}-x\right)$

9. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{sen(x^2-3x+2)}{x-2}$ 10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{tg}(2x)}{2x}$ 11. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{sen}(sen(2x))}{x}$

12. $\lim\limits_{x\to +\infty} x\,\mathrm{sen}\,\dfrac{1}{x}$ 13. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\cos\,x}{x}$ 14. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{sen}(11x)}{\mathrm{sen}(12x)}$

15. $\lim\limits_{u\to 2^-} \dfrac{2}{u^2-3u+2}$ 16. $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{2}{x^2-3x+2}$ 17. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x-\mathrm{sen}\,x}{2x+\mathrm{sen}\,x}$

3. Seja $f : I \to I\!R$, onde $I =]-\sqrt{\pi/2},\ \sqrt{\pi/2}[$, tal que

$$1+x^2+\frac{x^6}{3} \le f(x)+1 \le \sec x^2 + \frac{x^6}{3}, \text{ para todo } x \in I.$$

Calcule, **justificando**, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to 0} \left(f(x)\cos\left(\dfrac{1}{x+x^2}\right)\right)$.

4. A resolução abaixo está incorreta, embora o resultado esteja correto!!!!!. Assinale o erro e calcule (corretamente) o limite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}-x\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \underbrace{x\left(\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0}}-1\right)}_{\to 0} = \lim_{x\to+\infty}(x\cdot 0) = 0.$$

5. A resolução do limite abaixo também está incorreta! Assinale o erro.

a. $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\text{sen } x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x\overbrace{\left(\overbrace{\frac{\text{sen } x}{x}}^{\to 1}-1\right)}^{\to 0}}{x^3} = \lim_{x\to 0^+}\frac{0}{x^2} = 0.$$

b. Assuma que $x-\dfrac{x^3}{6}\le \text{sen } x \le x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}$, para todo $x\ge 0$. Utilize tais desigualdades para mostrar que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\text{sen } x - x}{x^3} = -\frac{1}{6}$.

6. Dê exemplos de:

a. funções f, g e de um ponto p tais que o $\displaystyle\lim_{x\to p}(f(x)+g(x))$ existe (finito), mas que os $\displaystyle\lim_{x\to p} f(x)$ e $\displaystyle\lim_{x\to p} g(x)$ não existem (finitos).

b. funções f, g e de um ponto p tais que o $\displaystyle\lim_{x\to p}(f(x)g(x))$ (finito), mas que pelo menos um dos $\displaystyle\lim_{x\to p} f(x)$ ou $\displaystyle\lim_{x\to p} g(x)$ não existe (finito).

7. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Assuma que você sabe que $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{x^2}=2$, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$ e que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2+1}=+\infty$. Calcule, justificando, os seguintes limites: $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{x}$, $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$ e $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

II. Sobre Continuidade

1. Verifique se cada uma das afirmações abaixo é Verdadeira (V) ou Falsa (F). Se for V, prove; caso contrário, dê um contra-exemplo.

a) Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função. Se $|f|$ tem limite em um ponto p, então f tem limite nesse ponto.

b) Se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ são funções ambas não contínuas em um ponto $p\in\mathbb{R}$, então a função fg também não será contínua nesse ponto.

c) Se f e g são funções tais que $\lim\limits_{x\to p}(f(x)+g(x)) = \ell \in I\!R$ e $\lim\limits_{x\to p} g(x) = \ell_2 \in I\!R$, então $\exists \lim\limits_{x\to p} f(x) = \ell - \ell_2$.

2. Para cada função dada, determine o conjunto dos pontos de seu domínio em que ela é contínua. Justifique.

a. $f(x) = \dfrac{3}{x+2}$

b. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-3|}{x-3}, & \text{se } x \neq 3, \\ 1, & \text{se } x = 3 \end{cases}$

c. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3}, & \text{se } x \neq 3, \\ 2, & \text{se } x = 3 \end{cases}$

d. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x^2-1)-1, & \text{se } x > 1, \\ \dfrac{x^2-3x+2}{x-1}, & \text{se } x < 1, \\ -1, & \text{se } x = 1 \end{cases}$

3. Determine o valor de ℓ para que a função dada seja contínua no ponto dado.

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{\sqrt{x+5}-\sqrt{10}}, & \text{se } x \neq 5, \\ \ell, & \text{se } x = 5 \end{cases}$ em $x_o = 5$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-x}{x}, & \text{se } x \neq 0, \\ \ell, & \text{se } x = 0 \end{cases}$ em $x_o = 0$.

4. Considere a função $f : I\!R \to I\!R$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{(x-1)^6}}{x-1}, & \text{se } x \neq 1, \\ 1, & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Verifique que $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$. Pergunta-se: f é contínua no ponto $x = 1$? Por quê?