3a.0. Lista de Exercícios de MAT 3110

BMAC - IME -USP - 1o. sem. 2013 - Turma 54

Profa. Maria Izabel Ramalho Martins

I. Aplicações do Teorema do Anulamento e do Valor Intermediário

1. Seja a função $g(x) = x^5 + x + 1$.
a. Mostre que g tem pelo menos uma raiz real no intervalo $]-1,\, 0\,[$.
b. Mostre que existe um $c \in\,]-1,\, 0\,[$ tal que $g(c) = 1/3$.

2. Seja $f(x) = x^7 + 8x^3 - x^5 - 8x$. Prove que $f\,'(x)$ tem pelo menos duas raízes distintas no intervalo $]-1,\, 1\,[$.

II. Ainda derivando...

1. Determine o domínio e Calcule as derivadas de 1a. ordem ordem de cada uma das funções abaixo. Simplifique quando possível o resultado.

a. $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ **b.** $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ **c.** $f(x) = x^{\pi} + \pi^{x} + \ln\pi$

d. $f(x) = x^e + e^x + \pi^e$ **e.** $f(t) = 2\,\mathrm{sen}\,t - \mathrm{tg}(2t) + 8\,e^{\pi}$ **f.** $f(x) = e^{-x^2}$

g. $f(x) = x\,e^{-x^2}$ **h.** $f(x) = \dfrac{x}{1-x}$ **i.** $f(x) = x^2 - \dfrac{1}{x^2}$

j. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ **k.** $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$ **l.** $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$

m. $f(x) = \dfrac{9}{x^2+9}$ **n.** $y = \dfrac{2x^2}{x^2-1}$ **o.** $y = \ln\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)$

p. $f(x) = e^{1/x^2} + \dfrac{1}{e^{x^2}}$ **q.** $f(x) = \log_2 x + 3^{2x}$ **r.** $f(x) = (1+x)^{1/x}$

s. $g(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$

Observação: Ass funções dos ítens **a.** e **b.** são denominadas, respectivamente, de cosseno hiperbólico (notação cosh) e de seno hiperbólico (notação senh). Verifique que: $\cosh^2 x - \mathrm{senh}^2\, x = 1$, $\dfrac{d}{dx}(\cosh x) = \mathrm{senh}\, x$ e $\dfrac{d}{dx}(\mathrm{senh}\, x) = \cosh x$.

2. Determine as derivadas de 2a. ordem das funções do exercício II.1, ítens de **a.** ao **o**.

III. Outras Aplicações das Derivadas

1. Prove que a equação $x^5 + x + 1 = 0$ tem uma única raiz real e localize-a entre dois inteiros consecutivos.

2. Sendo $f(x) = x^7 + 8x^3 - x^5 - 8x$. Prove que $f\,'(x)$ tem exatamente duas raízes distintas (isto é, que f' se anula somente em dois valores) e que elas estão no intervalo $]-1,\, 1\,[$.

3. Prove que existe um único $c \in I\!\!R$ tal que $\cos(\frac{c\pi}{2}) = 2 - 3c$.

4. Mostre que a funçao $g(x) = e^{3x} + 8x - \operatorname{sen}(\pi x)$ tem exatamente uma raiz real (isto é, g se anula uma única vez) e localize-a entre dois inteiros consecutivos.

5. Determine um valor de $c \in I\!\!R$ para que a função $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + c$ tenha uma unica raiz real.

6. Determine os intervalos de crescimento e/ou decrescimento das funções dadas abaixo.

a. $f(x) = x^3 - x$ **b.** $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ **c.** $f(x) = 2 - e^{-x}$

d. $f(x) = e^{-x^2}$ **e.** $f(t) = t + \dfrac{1}{t}$ **f.** $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 + 1}{x}$

g. $f(x) = \dfrac{x}{1-x}$ **h.** $f(x) = x^2 - \dfrac{1}{x^2}$ **i.** $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

j. $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$ **k.** $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$ **l.** $f(t) = \dfrac{t-1}{t^2}$

m. $y = \sqrt{x^2 - 4}$ **n.** $y = \dfrac{9}{x^2+9}$ **o.** $y = \dfrac{2x^2}{x^2-1}$

7. Prove as seguintes desigualdades:

a. $2\sqrt{x} > 3 - \dfrac{1}{x}$, para todo $x > 1$.

b. $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{2}x$, para $x > 0$.

c. $\dfrac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a} > \dfrac{b}{a}$, para $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$.