4a. Lista de Exercícios de MAT 3110

BMAC - 1o. sem. 2013 - Turma 54

Profa. Maria Izabel Ramalho Martins

I. Recordando as lista 2.1 e 3.0

1. Determine o domínio e calcule as derivadas de 1a. e de 2a. (novo) ordem de cada uma das funções abaixo. **Simplifique quando possível o resultado**.

a. $f(x) = x\, e^{1/x}$ **b.** $f(x) = x\, e^{-x^2/2}$ **c.** $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

d. $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ **e.** $f(x) = x^e + e^x + \pi^e$ **f.** $f(x) = \dfrac{x}{1-x}$

g. $f(x) = x^2 - \dfrac{1}{x^2}$ **h.** $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ **i.** $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

j. $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$ **k.** $f(x) = \dfrac{9}{x^2+9}$ **l.** $y = \dfrac{2x^2}{x^2-1}$

II. Aplicações das Derivadas - Gráficos

1. Roteiro para esboçar gráfico de função $y = f(x)$ em 2 passos:

Passo A. Determine:

1. o domínio de f;

2. os pontos em que a curva corta o eixo y e o eixo x, caso existam.

3. os intervalos de crescimento e decrescimento de f (via 1a. derivada); pontos críticos de f e a natureza deles (pontos de máximo e mínimo locais - caso existam);

4. os intervalos de concavidade e os pontos de inflexão de f (caso existam) (via 2a. derivada);

5. os seguintes limites, **conforme for o caso**,

- laterais ou em $p \notin \text{Dom}\, f$, mas p é extremo de intervalo aberto contido no domínio;
- laterais ou em $p \in \text{Dom}\, f$, mas f não é contínua em p;
- para $x \to +\infty$ ou para $x \to -\infty$;

6. as assíntotas horizontais e verticais (caso existam), (usar 5 - ver definição em $(*)$);

7. a existência de pontos de máximo/ mínimo globais.

Passo B. Concatene as informações dos ítens 1 a 7 para o esboço.

2. $(*)$ **Definição de assíntotas:**

2.1. Assíntota horizontal: Seja f uma função cujo domínio contém um intervalo $]-\infty, a[$ ou $]a, +\infty[$.

$$\text{Se} \begin{cases} \bullet \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell_1 \in I\!R \\ \quad\text{ou} \\ \bullet \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell_2 \in I\!R \end{cases}$$

então dizemos que a reta $\boxed{y = \ell_1}$ ou a reta $\boxed{y = \ell_2}$ é uma assíntota horizontal para o gráfico de f.

2.2. Assintota vertical: Seja f uma função cujo domínio contém um intervalo $]\,a,\,p\,[$ ou $]\,p,\,b\,[$, com a, b e $p \in I\!R$.

$$\text{Se} \begin{cases} \bullet \lim\limits_{x\to p^+} f(x) = +\infty \ (\text{ou } -\infty) \\ \quad\text{ou} \\ \bullet \lim\limits_{x\to p^-} f(x) = +\infty \ (\text{ou } -\infty) \\ \quad\text{ou} \\ \bullet \lim\limits_{x\to p} f(x) = +\infty \ (\text{ou } -\infty) \end{cases}$$

dizemos que a reta $\boxed{x = p}$ é uma assíntota vertical para o gráfico de$f$

3. Utilizando o roteiro acima esboce o gráfico das funções dadas:

a. $f(x) = x^3 - x^2$ **b.** $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ **c.** $f(x) = x^4 - 2x^2$

d. $f(x) = x\,e^{1/x}$ **e.** $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ **f.** $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 + 1}{x}$

g. $f(x) = \dfrac{x}{1-x}$ **h.** $f(x) = x^2 - \dfrac{1}{x^2}$ **i.** $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

j. $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$ **k.** $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$ **l.** $y = \dfrac{9}{x^2+9}$

m. $y = \dfrac{x^2 - x}{x+1}$ **n.** $y = \dfrac{x^3}{x^2+1}$

II. Regras de L'Hospital

1. Calcule, caso exista, os limites, justificando seu cálculo.

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{2x}}{x}$ **b.** $\lim\limits_{x\to0^+} x\,e^{1/x}$ **c.** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3\,e^{-x}$

d. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{e^{3x}}$ **e.** $\lim\limits_{x\to0^+} \left(\frac{1}{x} + \ln x\right)$ **f.** $\lim\limits_{x\to0^+} (1-\cos\,x)\ln x$

g. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{x}{2} + \ln(x^2+3)\right)$ **h.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+e^{2x})}{x}$ **i.** $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2})$

j. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(\cos\,x)}{x^2}$ **k.** $\lim\limits_{x\to0^+} x^x$ **l.** $\lim\limits_{x\to\pi/4} \dfrac{\operatorname{sen}\,x - \cos\,x}{\operatorname{sen}(4x)}$

2. Esboce o gráfico de:

a. $f(x) = x\,e^{-3x}$ **b.** $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$ **c.** $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$

d. $f(x) = x^2 \ln x$ **e.** $f(x) = x^x$ **f.** $f(x) = \dfrac{x}{2} + \ln(x^2+3)$

g. $f(x) = \dfrac{1+4\ln x}{x^4} - 3 \quad \left(\text{use que } f'(x) = \dfrac{-16\ln x}{x^5}\right)$

III. Aplicação de integral definida - Área

1. Calcule a área da região plana formada pelos pontos (x, y) tais que $x^2 \leq y \leq \sqrt{x}$.
2. $(*)$ Calcule a área da região compreendida entre as curvas $x = (y-2)^2$ e $y = x$.
3. Calcule a área da região comprendida entre a curva $y = x^3$ e a sua reta tangente em $x = 1$.
4. Esboce as curvas indicadas abaixo e calcule a área da região do plano delimitada por elas:

   a. $y = x^2$ e $y = 2x$, com $0 \leq x \leq 3$. **b.** $y = x^3 - 3x$ e $y = x$, com $x \geq 0$.
5. Calcule a área da região limitada pelas curvas $y = \text{sen } x$ e $y = \cos x$, no intervalo $[0, \pi/2]$.

   Nota de $(*)$: Tente olhar a região com a partição no eixo y, para exaurir a regiao.

IV. Primitivação ou Integral Indefinida

1. Calcule as integrais indefinidas (ou primitivas) indicadas abaixo:

   a. $\displaystyle\int \frac{2x^2-3x+1}{x^2}\,dx$ **b.** $\displaystyle\int \left(\sqrt{x^3} - cos\,x\right) dx$ **c.** $\displaystyle\int \frac{2x - \sqrt[3]{x}}{3x}\,dx$ **d.** $\displaystyle\int tg^2 x\,dx$

   e. $\displaystyle\int \left(\frac{x}{4} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right) dx$ **f.** $\displaystyle\int \left(\frac{\sec^2 x}{4} - \frac{3}{x^4}\right) dx$ **g.** $\displaystyle\int e^{-x}\,dx$ **h.** $\displaystyle\int e^{2x}\,dx$

   i. $\displaystyle\int \text{sen}(2x)\,dx$ **j.** $\displaystyle\int \cos(3t)\,dt$ **k.** $\displaystyle\int \left(e^{2x} + \sec^2(x/3)\right) dx$ **l.** $\displaystyle\int \frac{3}{x+1}\,dx$

   m. $\displaystyle\int (x-1)^{11}\,dx$ **n.** $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$ **o.** $\displaystyle\int \frac{1}{2x+1}\,dx$ **p.** $\displaystyle\int (2x+1)^{12}\,dx$

   Observação: Para os ítens de **g.** em diante tente achar **uma** primitiva usando a definição e as propriedades conhecidas das primitivas.

2. **I.** Verifique que $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$ e $\text{sen}^2\alpha = \dfrac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$, para $\forall \alpha \in I\!R$.

   II. Calcule $\displaystyle\int \text{sen}^2 x\,dx$ e $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx$.

   III. Calcule também:

   a. $\displaystyle\int \cos^2(2x)\,dx$ **b.** $\displaystyle\int (\text{sen } x - 5)^2\,dx$ **c.** $\displaystyle\int (\cos x - \text{sen } x)^2\,dx$

3. Determine as integrais indicadas abaixo (**A.R.C....!**)

a. $\int \text{sen}^2 x \cos x \, dx$ **b.** $\int \text{tg}^2 x \sec^2 x \, dx$ **c.** $\int \frac{x}{1-2x^2} \, dx$ **d.** $\int \frac{2x}{\sqrt{1-2x^2}} \, dx$

e. $\int 3x(1-2x^2)^{101} \, dx$ **f.** $\int \frac{e^x}{1+e^x} \, dx$ **g.** $\int \frac{x^3}{(3+x^4)^3} \, dx$ **h.** $\int \frac{1}{x(\ln x)^2} \, dx$

i. $\int \text{tg } t \, dt$ **j.** $\int \sqrt{\cos x} \text{ sen } x \, dx$ **k.** $\int x \, e^{-x^2} \, dx$ **l.** $\int x \sqrt[3]{1+x^2} \, dx$

m. $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} \, dx$ **n.** $\int \text{tg } 2x \, dx$ **o.** $\int \frac{e^x}{1+3e^x} \, dx$ **p.** $\int \frac{1}{x} \cos(\ln x) \, dx$

q. $\int \frac{1}{x \ln x} \, dx$ **r.** $\int \frac{\ln x}{x} \, dx$ **s.** $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx$ **t.** $\int \sec^2 x \, e^{\text{tg } x} \, dx$

4. Determine as primitivas abaixo: partes e alguma miscelânea...

a. $\int x \ln x \, dx$ **b.** $\int x \, e^{-x} \, dx$ **c.** $\int x^2 \, e^x \, dx$ **d.** $\int \sqrt{x} \ln x \, dx$

e. $\int \text{arctg}\, x \, dx$ **f.** $\int \text{arcsen}\, x \, dx$ **g.** $\int \frac{1}{x^3} \cos\left(\frac{\pi}{2x^2}\right) \, dx$ **h.** $\int e^x \text{ sen}(1-2e^x) \, dx$

i. $\int \frac{x \, e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \, dx$, com $\sigma > 0$.