RESUMO DE DERIVABILIDADE

I. DERIVADA- Definição

Definição: Sejam $y = f(x)$ uma função definida em um intervalo I e $x_o \in I$.

Dizemos que f é derivável (ou tem derivada ou é diferenciável) em x_o se, e somente se,

$$(**) \quad \text{o} \quad \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \in \mathbb{R}.$$

Nesse caso, o limite em $(**)$ é chamado **derivada de** f em x_o e denotado por uma das formas:

$$f'(x_o) \quad \text{ou} \quad \frac{df}{dx}(x_o) \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx}(x_o).$$

Definição: Uma função f é dita **derivável** se f é derivável em cada $x_o \in I$.

Observações: Podemos escrever também:

• Para $x_o \in I$ fixo, se $\displaystyle\lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \in \mathbb{R}$, então

$$f'(x_o) = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x}.$$

Para pontos ´´genéricos": para cada $x \in I$ fixado,

• $\displaystyle f'(x) = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, se os limites forem finitos

• Taxa de Variação

1. Para $x \neq x_o$, o quociente $\dfrac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$ é denominado taxa média de variação de f, no intervalo determinado por x_o e x.
2. Se f é derivável em x_o, a derivada $f'(x_o) = \displaystyle\lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x)}{x - x_o}$ é denominada taxa de variação (instantânea) de f em x_o.

II. Derivação x Continuidade

Teorema 1. Sejam f uma função definida em um intervalo I e $x_o \in I$.

Se f é derivável em $x_o \in I,$ então f é contínua em x_o.

Observações: • Se f não é contínua em x_o, então f não é derivável em x_o. (Consequência do Teor. 1)

• Cuidado!! f ser contínua em x_o nem sempre implica que f é derivável em x_o. (*Não se esqueça de ter um contra-exemplo a mão.*)

III. Derivabilidade e Regras de Derivação

Teorema 2. (Propriedades Operacionais da Derivação)
Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$, e f e g funções definidas em um intervalo I e tais que elas sejam deriváveis em $p \in I$. Então:

a. As funções $f + g$, αf e $f \cdot g$ são deriváveis em p.

b. As funções $\dfrac{1}{g}$ e $\dfrac{f}{g}$ têm derivada em p, desde que $g(p) \neq 0$.

E são válidas: **D1.** $(f+g)'(p) = f'(p) + g'(p)$.

D2. $(\alpha f)'(p) = \alpha f'(p)$.

D3. $(f \cdot g)'(p) = f'(p) \cdot g(p) + f(p) \cdot g'(p)$.

D4. $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(p) = \dfrac{-g'(p)}{(g(p))^2}$.

D5. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(p) = \dfrac{f'(p) \cdot g(p) - f(p) \cdot g'(p)}{(g(p))^2}$

• Regra da Cadeia - Derivada de composta de funções

Teorema 3. (Regra da Cadeia)

Sejam as funções $u = f(x)$, definida num intervalo I, e $y = g(u)$ definida num intervalo J e tais que $\mathrm{Im}\, f \subset J$.

- Se f tem derivada em p (i.é, existe $f'(p) = \dfrac{df}{dx}(p)$.) e
- Se g tem derivada em $u_o = f(p)$ (i. é, existe $g'(u_o) = g'(f(p)) = \dfrac{dg}{du}(u_o)$.)

Então a função composta $C(x) = (g \circ f)(x) := g(f(x))$ tem derivada em p e vale que:

$$C'(p) = (g \circ f)'(p) = g'(f(p)) \cdot f'(p).$$

Podemos também escrever, para $\forall x \in I$ em que f é derivável e para $\forall u = f(x)$ em que g é derivável, que:

$$\frac{dC}{dx}(x) = \frac{dg}{du}(u) \cdot \frac{df}{dx}(x) = \frac{dg}{du}(u) \cdot \frac{du}{dx}(x), \text{ onde } u = f(x).$$

$$\text{Ou ainda, } \frac{dy}{dx}(x) = \frac{dy}{du}(u(x)) \cdot \frac{du}{dx}(x)$$

IV. Regras de Derivação

0. $\dfrac{d}{dx}(constante) = 0$

1. $\dfrac{d}{dx}(ax+b) = a$

2.0. $\dfrac{d}{dx}(x^n) = n\,x^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

2.1. $\dfrac{d}{dx}(x^m) = m\,x^{m-1}$, com $m \in Z$ e $x \neq 0$.

2.2. $\dfrac{d}{dx}\left(x^{\frac{p}{q}}\right) = \dfrac{p}{q}\,x^{\frac{p}{q}-1}$, com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$ e $x > 0$.

2.3. $\dfrac{d}{dx}(x^\alpha) = \alpha\,x^{\alpha-1}$, com $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x > 0$.

3. $\dfrac{d}{dx}(e^x) = e^x$

4. $\dfrac{d}{dx}(\ln x) = \dfrac{1}{x}$ $(x > 0)$

5. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x.$

6. $\dfrac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x$

7. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{tg} x) = \sec^2 x$ $(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z})$

8. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{cotg} x) = -\operatorname{cossec}^2 x$ $(x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z})$

9. $\dfrac{d}{dx}(\sec x) = \operatorname{tg} x \cdot \sec x$ $(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi)$

10. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{cossec} x) = -\operatorname{cotg} x \cdot \operatorname{cossec} x$ $(x \neq k\pi)$

• **Regras de Derivação com Regra da Cadeia**

Seja f uma função derivável. Então, pela Regra da Cadeia, vale que:

2. $\dfrac{d}{dx}\left((f(x))^{\alpha}\right) = \alpha \cdot (f(x))^{\alpha-1} \cdot f'(x)$ (com $f(x) > 0$)

3. $\dfrac{d}{dx}\left(e^{f(x)}\right) = f'(x) \cdot e^{f(x)}$

4. $\dfrac{d}{dx}\left(\ln(f(x))\right) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ (com $f(x) > 0$)

5. $\dfrac{d}{dx}\left(\mathrm{sen}(f(x))\right) = f'(x) \cdot \cos(f(x))$

6. $\dfrac{d}{dx}\left(\cos(f(x))\right) = -f'(x) \cdot \mathrm{sen}(f(x))$

7. $\dfrac{d}{dx}\left(\mathrm{tg}(f(x))\right) = f'(x) \cdot \sec^2(f(x))$

8. $\dfrac{d}{dx}\left(\mathrm{cotg}(f(x))\right) = -f'(x) \cdot \mathrm{cossec}^2(f(x))$

9. $\dfrac{d}{dx}\left(\sec(f(x))\right) = f'(x) \cdot \sec(f(x)) \cdot \mathrm{tg}(f(x))$

10. $\dfrac{d}{dx}\left(\mathrm{cossec}(f(x))\right) = -f'(x) \cdot \mathrm{cossec}(f(x)) \cdot \mathrm{cotg}(f(x))$

VII- Geometria da derivada - Reta Tangente

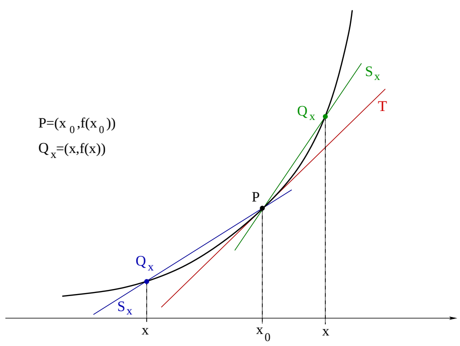
Definição: Seja f definida em um intervalo I. Suponha que f seja derivável em x_o. Então pode-se definir reta tangente T ao gráfico de f em $P = (x_o, f(x_o))$:

• é a reta plana que tem coeficiente angular igual a $f'(x_o)$ e passa pelo ponto P.

A equação da reta T é: $\boxed{y - f(x_o) = f'(x_o)(x - x_o)}$.

Ess reta é, portanto, o gráfico da função $y = T(x) = f'(x_o)(x - x_o) + f(x_o)$.

• **Por que reta tangente via derivada?**



Para $x \neq x_o$, seja S_x a reta (secante) que liga os pontos $P = (x_o, f(x_o))$ e $Q_x = (x, f(x))$.

O coeficiente angular de cada S_x é dado por $m(x) = \dfrac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$.

Supondo que $\lim\limits_{x \to x_o} m(x) = \lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \in \mathbb{R}$ e, sendo portanto igual a $f'(x_o)$, pode-se entender então porque a reta T, de coeficiente angular igual $f'(x_o)$, definida como reta tangente ao gráfico de f em $(x_o, f(x_o))$, pode ser vista como " posição limite " das retas secantes S_x, que passam por $(x_o, f(x_o))$, quando $x \to x_o$.