

Sobre o número neperiano “e”, exponenciais e logaritmos

Definição: $e := \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

A definição acima do número neperiano “e” decorre do fato de que a sequência $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$, onde $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, é estritamente crescente e limitada superiormente (ou seja, $a_n < 3$, para todo $n \geq 1$), conforme mostrado em sala.

Portanto a sequência dada converge, ou seja $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ é um número real e esse número real, por definição é denominado de “e”.

• A função exponencial

• **Lembrete:** Dados $a \in \mathbb{R}$, com $a > 0$ e $r \in \mathbb{Q}$, a potência $a^r \in \mathbb{R}$ é definida da seguinte forma:

$$\bullet \text{ Se } \begin{cases} r = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z} \\ n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \end{cases}, \text{ então } a^r = a^{m/n} := \sqrt[n]{a^m}.$$

Com tal definição, para cada $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, podemos definir a função $f_a : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f_a(r) = a^r$, para todo $r \in \mathbb{Q}$.

Observação: Note que a função f_1 é a função constante $g(x) = 1$, para todo $x \in \mathbb{Q}$.

Teorema: Seja $a \in \mathbb{R}$, com $a > 0$ e $a \neq 1$. Então existe uma função $\hat{f}_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, contínua, tal que

$$\hat{f}_a(r) = f_a(r) = a^r, \text{ para todo } r \in \mathbb{Q}.$$

A função $\hat{f}_a$ é denominada *função exponencial de base a* e é também denotada por $\exp_a$.

Portanto, escrevemos $\hat{f}_a(x) = a^x = \exp_a(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

• Propriedades da função exponencial $\exp_a$

1. $\text{Dom } \exp_a = \mathbb{R}$ e $\text{Im } \exp_a =]0, +\infty[$.
2. $a^0 = 1$ e $a^1 = a$
3. $a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}$, $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$
4. $a^{x_1} : a^{x_2} = a^{x_1 - x_2}$, $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$$5. (a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 \cdot x_2}, \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

$$6. \begin{cases} \text{Para } a > 1, \text{ se } x_1 < x_2 \text{ então } a^{x_1} < a^{x_2}. \text{ (i.é, } \exp_a \text{ é estritamente crescente (E.C.))} \\ \text{Para } 0 < a < 1, \text{ se } x_1 < x_2 \text{ então } a^{x_1} > a^{x_2}. \text{ (i.é, } \exp_a \text{ é estritamente decrescente (E.D.))} \end{cases}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}, \text{ com } x_0 \in \mathbb{R}.$$

$$8. \begin{cases} \text{Se } a > 1 \text{ então } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0 \end{cases} \quad (\text{ caso E.C.}) \\ \text{Se } 0 < a < 1 \text{ então } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty \end{cases} \quad (\text{ caso E.D.}) \end{cases}$$

• A função logaritma $\log_a$

Seja $a \in \mathbb{R}$, com $a > 0$ e $a \neq 1$. Usando a propriedade 1 acima, consideremos a função exponencial $(*) \exp_a : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$, definida por $y = \exp_a(x) = a^x$.

Desde que a função $\exp_a$, como foi visto acima, tem a propriedade 6 (i.é, é E.C. ou E.D.), então ela é injetora. Por restrição do contradomínio à Imagem (ler em $(*)$), então ela é invertível.

A função inversa da função $\exp_a$, que será denotada por $\log_a$, é por definição a função

$$\log_a :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } \begin{cases} \text{para cada } y > 0, \\ \log_a(y) = x \end{cases} : \iff a^x = y.$$

• Propriedades da função logarítmica $\log_a$

$$\text{Lembrando que: } \log_a x = y \iff a^y = x$$

$$1. \text{Dom } \log_a =]0, +\infty[\text{ e } \text{Im } \log_a = \mathbb{R}$$

$$2. \log_a 1 = 0 \text{ e } \log_a a = 1.$$

$$3. \log_a (x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2, \quad \forall x_1, x_2 > 0.$$

$$4. \log_a \left(\frac{x_1}{x_2} \right) = \log_a x_1 - \log_a x_2, \quad \forall x_1, x_2 > 0.$$

$$5. \log_a x^\alpha = \alpha \cdot \log_a x, \quad \forall x > 0, \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$6. \begin{cases} \text{Para } a > 1, \text{ se } 0 < x_1 < x_2 \text{ então } \log_a x_1 < \log_a x_2. \text{ (i.é., } \log_a \text{ é E.C.)} \\ \text{Para } 0 < a < 1, \text{ se } 0 < x_1 < x_2 \text{ então } \log_a x_1 > \log_a x_2. \text{ (i.é., } \log_a \text{ é E.D.)} \end{cases}$$

$$7. \text{ Seja } b > 0, b \neq 1. \text{ Então, para todo } x > 0, \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \text{ (mudança de base)}$$

$$8. \text{ Importantes: } \begin{cases} a^{\log_a x} = x, \quad \forall x > 0 \\ \log_a(a^x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

• Gráficos das funções $\exp_a$ e $\log_a$ de base $a, a > 1$

$$y = a^x \quad y = \log_a x \quad y = x$$

$$\lim_{x \rightarrow p} a^x = a^p, \quad \forall p \in \mathbb{R}$$

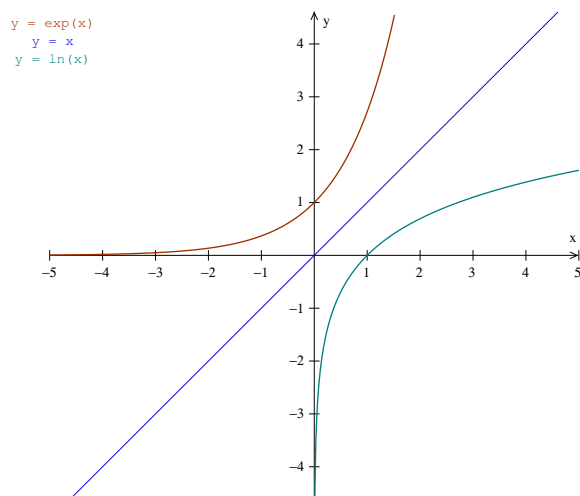
$$\lim_{x \rightarrow p} \log_a x = \log_a p, \quad \text{para todo } p > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$$



• Gráficos das funções $\exp_a$ e $\log_a$ de base $a, 0 < a < 1$

$$y = a^x \quad y = \log_a x \quad y = x$$

$$\lim_{x \rightarrow p} a^x = a^p, \quad \forall p \in \mathbb{R}$$

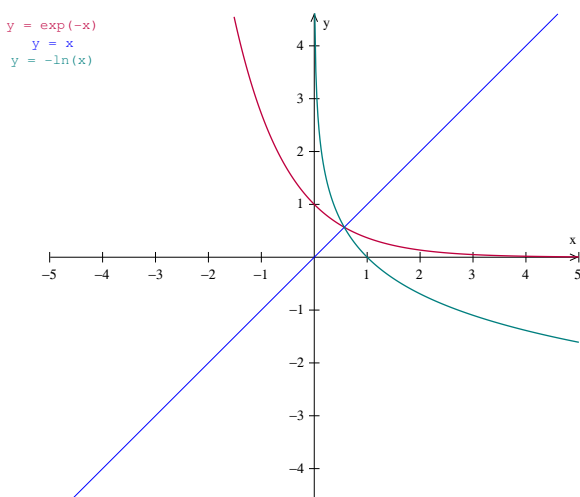
$$\lim_{x \rightarrow p} \log_a x = \log_a p, \quad \text{para todo } p > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$$



• 2º Limite fundamental e outros limites relacionados

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n := e \quad (n \in \mathbf{N}, n \geq 1)$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

- $\lim_{u \rightarrow 0} (1 + u)^{1/u} = e$

- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$

- **Exercício:** Seja $a \in \mathbf{R}$, com $a > 0$ e $a \neq 1$. Mostre que existe o $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{a^t - 1}{t}$ e que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{a^t - 1}{t} = \ln a.$$