Teoria dos Modelos: *Forcing*

Ricardo Bianconi

Sumário

1 Introdução

Em 1939, Kurt Gödel publicou o trabalho *Consistency-proof for the Generalized Continuum Hypothesis*[1], em que provou a consistência relativa da hipótese generalizada do contínuo ($2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$, para todo ordinal α) com a teoria dos conjuntos *ZF* (de Zermello e Fraenkel), obtendo uma fórmula $L(x)$ (dizendo que o elemento x é definível por uma fórmula $\phi(x, y_1, \ldots, y_n)$, com elementos y_i já definidos previamente) e demonstrando que são teoremas

[1]K. Gödel, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **25** (1939), p. 220-224. Consulte-se também sua monografia *The Consistency of the Axiom of Choice and the Generalized Continuum Hypothesis*, 4ª edição, Princeton University Press, Princeton, EUA, 1958.

da teoria ZF cada axioma de ZF, o Axioma da Escolha e a Hipótese Generalizada do Contínuo, quando relativizadas à fórmula $L(x)$[2]. Essa técnica ficou conhecida como método dos modelos internos, pois a fórmula $L(x)$ selecionava uma subclasse do universo dos conjuntos como um *modelo* de ZF. Essa classe L tem a propriedade de que, qualquer que seja a classe M (definida por uma fórmula $M(x)$) satisfazendo os axiomas de ZF, é um teorema de ZF que $\forall x(L(x) \to M(x))$.

Restava a questão de saber se o Axioma da Escolha e a Hipótese (Generalizada) do Contínuo serima teoremas de ZF, sem aquela relativização. Uma restrição encontrada desde o início para atacar o problema da possível consistência das negações desses axiomas era que, se $T \supseteq ZF$ fosse uma teoria consistente com o axioma $V = L$ (ou seja, $\forall x\, L(x)$), então o método dos modelos internos não se aplicaria ao caso (veja a seção 5). Dessa forma era preciso buscar modelos que estendessem a classe L e o método para isto é o *forcing*, descoberto por Paul Cohen em 1963[3] e posteriormente desenvolvido por vários matemáticos.

O novo método consistia em produzir uma função sobrejetora $f : 2^\omega \to \omega_2$ (ou, o que é equivalente, $f : \omega \times \omega_2 \to 2 = \{0, 1\}$), por exemplo, a partir de um modelo inicial em que valesse a hipótese do contínuo e contendo informações parciais (finitas) sobre tal f: elementos do conjunto $\mathrm{Fin}(\omega \times \omega_2, 2)$ das partes finitas de todas as funções $f : \omega \times \omega_2 \to 2 = \{0, 1\}$. Mais geralmente, gostaríamos de obter uma $f : A \to B$ sobrejetora (A infinito e $B \neq \varnothing$) a partir de partes finitas de f. Imaginemos que tal f exista e seja $G = \{p \in \mathbb{P} = \mathrm{Fin}(A, B) : p \subset f\}$. Tal conjunto tem que satisfazer certas condições de compatibilidade:

1. $\varnothing \in G$;

2. se $p \in G$ e $q \subseteq p$, então $q \in G$;

3. se $p, q \in G$, existe $r \in G$, tal que $p \subseteq r$ e $q \subseteq r$ (por exemplo, $r = p \cup q$).

Além dessas propriedades, queremos que f tenha como domínio o conjunto A e como imagem todo o conjunto B. Para isso, impomos mais as

[2]Ou seja, transformando indutivamente fórmulas ϕ para ϕ^L, pela mudança dos quantificadores $\forall x\phi$ para $\forall x(L(x) \to \phi^L)$ e $\exists x\phi$ para $\exists x(L(x) \wedge \phi^L)$.

[3]P. Cohen, *The Independence of the Continuum Hypothesis, I, II.* Proc. Nat. Acad. Sci. USA **50** (1963), p. 1143-1148, **51** (1964), p. 105-110. Consulte-se também sua monografia *Set Theory and the Continuum Hypothesis*, W. A. Benjamin, Inc., Nova Iorque, 1966.

condições de G intersectar os conjuntos $D_a = \{p \in \mathbb{P} : \exists b \in B((a,b) \in p)\}$, para todo $a \in A$ e $E_b = \{p \in \mathbb{P} : \exists a \in A((a,b) \in p)\}$, para todo $b \in B$. Com isto, se $f = \bigcup G$, então $f \in^A B$ (isto é, f é função de A em B), cuja imagem será todo o conjunto B.

O método de *forcing* consiste em construir um modelo M, por uma variação do método das constantes, usando uma ordem parcial $\mathbb{P}$ como acima e um conjunto *genérico* G que fará o serviço de garantir que em tal M exista a função (ou outra relação) f.

A noção de *forcing* foi estendida à Teoria de Modelos por Abraham Robinson[4] e posteriormente generalizado por H. Jerome Keisler[5], versão que será apresentada, com pequenas modificações, neste texto.

É o que faremos a seguir.

2 *Forcing* em Teoria dos Modelos

Veremos na seção 5 que o método de *forcing* somente funciona com modelos enumeráveis. Por isso, trabalhamos aqui com tais modelos.

Assumimos que L seja uma assinatura finita ou enumerável e que $C = \{c_n : n \in \mathbb{N}\}$ seja um conjunto de novos símbolos de constantes (disjunto de L) e denotaremos, como sempre, $L(C) = L \cup C$. Uma $L(C)$-estrutura M será chamada de modelo canônico se a aplicação de interpretação $c \in C \mapsto c^M \in M$ for sobrejetora.

Trabalharemos com a linguagem infinitária $L_{\omega_1\omega}$, em que permitimos $\bigvee$ e $\bigwedge$ de conjuntos finitos ou enumeráveis de fórmulas, mas quantificações sobre seqüências finitas de variáveis. Para simplificar a exposição, suporemos que $L_{\omega_1\omega}$ tenha apenas os símbolos lógicos $\bigvee$, $\neg$ e $\exists$, sendo que $\bigwedge_{\phi\in\Phi}\phi$ será usada como abrviação de $\neg\bigvee_{\phi\in\Phi}\neg\phi$ e $\forall x\phi$ como abreviação de $\neg(\exists x\neg\phi$.

Como o conjunto de todas as $L_{\omega_1\omega}$-fórmulas é não enumerável, trabalharemos com um fragmento denotado por L_A, que será um conjunto L_A de $L_{\omega_1\omega}$-fórmulas fechado por subfórmulas, por conjunções e disjunções finitas,

[4] A. Robinson, *Forcing in Model Theory*, 1st. Nat. Alta Math., Symposia Math., **5** (1970), 69-82. A. Robinson, *Infinite Forcing in Model Theory*, Proc. of the Second Scandinavian Logic Symposium, North Holland, 1971, 317-340.

[5] H. J. Keisler, *Forcing and the Omitting Types Theorem*, em M. D. Morley (editor), Studies in Model Theory, the Mathematicam Association of America, Inc., 1973, 96-133.

e se $\phi(x) \in L_A$ e t for um termo, então $\phi(t) \in L_A$; e L_A contém todas as L-fórmulas de primeira ordem.

Observemos que se $\Psi \subset L_{\omega_1\omega}$ for um conjunto finito ou enumerável, então o menor fragmento que o contém, $L_A(\Psi)$, será também enumerável. Para a assinatura $L(C)$, os símbolos $L(C)_{\omega_1\omega}$ e $L(C)_A$ terão os significados derivados dos acima.

Uma **propriedade de *forcing*** é um par $(\mathbb{P}, f)$ tal que:

1. $\mathbb{P} = (P, \leq, \mathbf{1})$ é uma ordem parcial com elemento máximo $\mathbf{1}$;
2. f é uma função que associa a cada elemento $p \in P$ um conjunto finito de $L(C)$-sentenças atômicas, satisfazendo $f(p) \supseteq f(q)$ para todos $p, q \in P$, tais que $p \leq q$; dado que uma L-estrutura M é determinada pelo seu diagrama (conjunto de $L(M)$-sentenças atômicas satisfeitas em $(M, a)_{a\in M}$), a propriedade de *forcing* traz uma coleção de partes finitas dos diversos diagramas possíveis de estruturas que queiramos construir;
3. se s e t forem $L(C)$-termos sem variáveis e se a sentença atômica $(s = t)$ estiver em $f(p)$, então, para algum $q \leq p$, $(t = s) \in f(q)$;
4. se s e t forem $L(C)$-termos sem variáveis e se as sentenças atômicas $(s = t)$ e $\phi(s)$ estiverem em $f(p)$, então, para algum $q \leq p$, $\phi(t) \in f(q)$;
5. se s e t forem $L(C)$-termos sem variáveis e se a sentença atômica $(s = t)$ estiver em $f(p)$, então, para algum $q \leq p$ e para alguma constante $c \in C$, $(c = t) \in f(q)$.

Os elementos de P serão chamados de condições em $\mathbb{P}$.

Definiremos agora a relação $\Vdash$ entre condições em $\mathbb{P}$ e $L(C)$-sentenças ϕ, $p \Vdash \phi$ (leia-se "p força ϕ), recursivamente na complexidade de ϕ:

1. se ϕ for sentença atômica, então $p \Vdash \phi$ se $\phi \in f(p)$;
2. se $p \vdash \psi$, para alguma $\psi \in \Phi$, então $p \Vdash \bigvee_{\phi\in\Phi} \phi$;
3. se $q \nVdash \phi$, para nenhuma condição $q \leq p$, então $p \Vdash \neg\phi$;
4. se $p \Vdash \phi(c)$, para alguma $c \in C$, então $p \Vdash \exists x \phi(x)$.

Definimos também a relação $\Vdash^*$, $p \Vdash^* \phi$ (leia-se "p força fracamente ϕ), se $p \Vdash \neg\neg\phi$.

Lema 2.1 Seja $\mathbb{P}$ uma propriedade de *forcing* e seja $\phi \in L(C)_A$. Então:

1. $p \Vdash^* \phi$ se, e somente se, para toda condição $q \leq p$, existir uma condição $r \leq q$, tal que $r \Vdash \phi$;
2. se $p \Vdash \phi$ e $q \leq p$, então $q \Vdash \phi$;
3. não pode ocorrer que $p \Vdash \phi$ e também que $p \Vdash \neg\phi$;
4. se $p \Vdash \phi$, então $p \Vdash^* \phi$;
5. $p \Vdash \neg\phi$ se, e somente se, $p \Vdash^* \neg\phi$;
6. $p \Vdash \forall x \phi(x)$ se, e somente se, para cada $c \in C$ e cada $q \leq p$, existe $r \leq q$, tal que $r \Vdash \phi(c)$;
7. $p \Vdash \bigvee_{\phi \in \Phi} \phi$ se, e somente se, para cada $\phi \in \Phi$ e cada $q \leq p$, existe $r \leq q$, tal que $r \Vdash \phi$.

Demonstração: Os itens 1, 3, 6 e 7 decorrem facilmente da definição de $\Vdash$.

O item 2 é demonstrado por indução na complexidade de ϕ, sendo que o passo inicial, em que ϕ é atômica, decorre das definições, pois $p \Vdash \phi$ se $\phi \in f(p)$ e, como $q \leq p$ implica $f(q) \supseteq f(p)$, temos que $\phi \in f(q)$. O mesmo tipo de argumentação aplica-se aos casos de $\bigvee_{\phi \in \Phi} \phi$ e de $\exists x \phi$.

Para o item 4, suponhamos que $p \Vdash \phi$. Então, pela definição de $\Vdash$ e pelos itens 2 e 3, $q \nVdash \neg\phi$, para nenhum $q \leq p$. Novamente, pela definição de $\Vdash$, $p \Vdash \neg\neg\phi$, ou seja $p \Vdash^* \phi$.

No item 5 precisamos apenas demonstrar que $p \Vdash^* \neg\phi$ implica que $p \Vdash \neg\phi$, devido ao item 4 já provado. Assim, suponhamos que $p \Vdash \neg\neg\neg\phi$, ou seja, não existe nenhum $q \leq p$, tal que $q \Vdash \neg\neg\phi$. Então, para todo $q \leq p$, existe $r \leq q$, tal que $r \Vdash \neg\phi$, pelo item 1. Portanto, não existe $q \leq p$, tal que $q \Vdash \phi$, pois se $r \leq q$ for tal que $r \Vdash \neg\phi$ e se $p \vdash \theta$, para alguma sentença θ, pelo item 2 teríamos que $r \Vdash \theta$ e, pelo item 3, θ não pode ser ϕ. Desta forma, temos que $p \Vdash \neg\phi$. $\square$

Dizemos que um conjunto $G \subset P$ é genérico, se:

1. para todos $p \in G$ e $q \in P$, tais que $p \leq q$, vale que $q \in G$;
2. para todos $p, q \in G$, existe $r \in G$, tal que $r \leq p$ e $r \leq q$;
3. para cada $L(C)_A$-sentença ϕ, existe algum $p \in G$, tal que $p \Vdash \phi$, ou $p \Vdash \neg\phi$.

Lema 2.2 Para cada $p \in P$, existe um genérico $G \subset P$, tal que $p \in G$.

Demonstração: Enumeremos todas as $L(C)_A$-sentenças, $\{\phi_n : n \in \mathbb{N}\}$. Seja $p_0 = p$ e suponhamos que já tenhamos definido $p_0 \geq p_1 \geq \ldots \geq p_n$, com a propriedade que usaremos agora para definir p_{n+1}: se $p_n \Vdash \neg\phi_n$, então $p_{n+1} = p_n$; caso contrário, seja $p_{n+1} \leq p_n$, tal que $p_{n+1} \Vdash \phi_n$.

Seja $G = \{q \in P : \exists n \in \mathbb{N},\, p_n \leq q\}$. Então

1. $p = p_0 \in G$;
2. se $q \in G$ e $r \in P$ são tais que $q \leq r$, então existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $p_n \leq q \leq r$ e, portanto, $r \in G$;
3. sejam $q, r \in G$ e $m, n \in \mathbb{N}$, tais que $p_m \leq q$ e $p_n \leq r$; então $p_{\max\{m,n\}} \leq q$ e $p_{\max\{m,n\}} \leq r$, ou seja, existe $s \in G$, $s \leq q$ e $s \leq r$;
4. se ϕ for uma $L(C)_A$-sentença, seja n seu índice na enumeração; pela definição da seqüência p_j, $j \in \mathbb{N}$, ou $p_{n+1} \Vdash \neg\phi$ ou $p_{n+1} \Vdash \phi$.

Isto significa que G é o genérico procurado. □

Dizemos também que o modelo canônico M foi gerado por G se $M \models \phi$, para toda $L(C)_A$-sentença ϕ, tal que $p \Vdash \phi$, para algum $p \in G$.

Lema 2.3 Dado um genérico G, existe um modelo canônico M gerado por ele.

Demonstração: Se T for o conjunto de todas as $L(C)_A$-sentenças ϕ, tais que $p \Vdash \phi$, para algum $p \in G$, então T é um conjunto consistente maximal, e que contém informação para a construção de M, pelo método das constantes.

De fato, o conjunto T satisfaz as seguintes propriedades, conseqüências imediatas da definição de $\Vdash$ e de G:

1. se ϕ é uma $L(C)_A$-sentença, então exatamente uma dentre ϕ e $\neg\phi$ pertence a T;

2. a sentença $\bigvee_{\phi\in\Phi}\phi$ está em T se, e somente se, para alguma $\phi \in \Phi$, $\phi \in T$;

3. a sentença $\exists x\phi(x)$ está em T se, e somente se, para algum $c \in C$, $\phi(c) \in T$;

4. se s e t forem $L(C)$-termos sem variáveis e $(s = t) \in T$, então $(t = s) \in T$;

5. se s e t forem $L(C)$-termos sem variáveis e $(s = t), \phi(s) \in T$, então $\phi(t) \in T$;

6. para cada $L(C)$-termo t, existe $c \in C$, tal que $(c = t) \in T$.

Se definirmos a relação binária em C, $c \sim d$ se $(c = d) \in T$, o conjunto T tem informação para provar que é uma relação de equivalência e para definir uma interpretação de $L(C)$ em M, o conjunto de classes de equivalência, de modo a torná-lo um modelo de T, como no método das constantes. $\square$

Com esses dois lemas, provamos o seguinte teorema:

Teorema 2.1 Dado $p \in P$, existe modelo p-genérico M. $\square$

Uma conseqüência importante é a seguinte:

Teorema 2.2 Seja $\mathbb{P}$ uma noção de *forcing* e seja $p \in P$. Então $p \Vdash^* \phi$ se, e somente se, ϕ for satisfeita em todo modelo p-genérico. Portanto, se $T = \{\phi : \phi \text{ é } L(C)_A\text{-sentença e } p \Vdash^* \phi\}$, e se $T \models \psi$, então $p \Vdash^* \psi$.

Demonstração: Suponhamos, primeiramente, que $p \Vdash^* \phi$, ou seja, que $p \Vdash \neg\neg\phi$. Então, se M for p-genérico, a demonstração do teorema anterior permite-nos afirmar que $M \models \neg\neg\phi$, ou seja, que $M \models \phi$.

Para a demonstração da recíproca, suponhamos que $p \nVdash^* \phi$ e seja $q \leq p$, tal que $q \Vdash \neg\phi$. Então, se M for modelo q-genérico, $M \models \neg\phi$. Como $q \leq p$, M também é um modelo p-genérico. $\square$

3 Aplicação: O Teorema da Omissão de Tipos – Uma Nova Demonstração

Nesta seção usaremos as propriedades de *forcing* $\mathbb{P}(\mathcal{M})$ e $\mathbb{P}(\mathcal{M}, \Phi)$ descritas nos exercícios 6.2 e 6.4, respectivamente, sendo $\mathcal{M}$ uma classe de L-estruturas. Seja $\mathcal{M}$ uma classe não vazia de L-estruturas. Dizemos que uma $L(C)$-fórmula é básica se for atômica ou a negação de uma fórmula atômica. Um pedaço finito de algum $M \in \mathcal{M}$ é um conjunto finito de $L(C)$-sentenças básicas satisfeitas em M para alguma interpretação das constantes de C ocorrendo nelas – esses pedaços finitos serão chamados de condições. Seja $\mathbb{P}(\mathcal{M}) = (\mathbb{P}, f)$ dada por: $\mathbb{P}$ é a ordem parcial de todos os pedaços finitos p de estruturas $M \in \mathcal{M}$, com a ordem $\leq$ dada por $\supseteq$, e $f(p)$ o conjunto de todas as sentenças atômicas contidas em p. Um modelo genérico para essa propriedade de *forcing* será chamado de $\mathcal{M}$-genérico.

Uma L_A-fórmula ϕ será chamada de $\forall\vee\exists$-fórmula se for da seguinte forma:

$$\forall x_1 \ldots \forall x_m \bigvee_{n<\omega} \exists y_1 \ldots \exists y_{i_n} \left(\varphi_{n,1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{n,j_n}\right),$$

sendo que cada $\varphi_{k,r}$ é uma fórmula básica. Denotemos por $\psi(\bar{x})$ a fórmula $\bigvee_{n<\omega} \exists y_1 \ldots \exists y_{i_n} (\varphi_{n,1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{n,j_n})$.

O seguinte teorema dá uma boa caracterização das $\forall\vee\exists$-sentenças de L_A que são satisfeitas em todos os modelos $(\mathcal{M})$-genéricos.

Teorema 3.1 Seja $\mathcal{M}$ uma classe de L-estruturas. Uma $\forall\vee\exists$-sentença $\phi = \forall\bar{x}\psi(\bar{x})$ (como acima) de L_A será satisfeita em todos os modelos $\mathcal{M}$-genéricos se, e somente se, para todo pedaço finito de $\mathcal{M}$ e para toda m-upla de constantes $\bar{c} \in C^m$, o conjunto $p \cup \{\psi(\bar{c})\}$ for satisfeito em alguma $m \in \mathcal{M}$.

Demonstração: Como os quantificadores mais externos de ϕ são todos universais, temos que ϕ será satisfeita em todos os modelos $\mathcal{M}$-genéricos se, e somente se, para todas as m-uplas $\bar{c} \in C^m$, $\psi(\bar{c})$ for satisfeita em todos esses modelos.

Como $\mathbf{1}$ pertence a todo conjunto genérico de P, a afirmação anterior é equivalente a dizer que para todo $\bar{c} \in C^m$, $\mathbf{1} \Vdash^* \psi(\bar{c})$.

Isto traduz-se na afirmação equivalente que para todo $\bar{c} \in C^m$ e para todo $p \in P$, existe $q \leq p$, tal que $q \Vdash \psi(\bar{c})$.

Da definição de $\Vdash$, obtemos a afirmação equivalente de que para todo $\bar{c} \in C^m$ e para todo $p \in P$, existem $q \leq P$, $n < \omega$ e $\bar{d} \in C^{i_n}$, tais que $q \Vdash \varphi_{n,1}(\bar{c}, \bar{d})$, ..., $q \Vdash \varphi_{n,j_n}(\bar{c}\bar{d})$.

Por indução em k, $1 \leq k \leq j_n$, chegamos à seguinte afirmação equivalente de que para todo $\bar{c} \in C^m$ e para todo $p \in P$, existem $n < \omega$ e $\bar{d} \in C^{j_n}$, tais que $q = p \cup \{\varphi_{n,k} : 1 \leq k \leq j_n\} \in P$.

Pela definição da ordem parcial P, vemos que isso é equivalente à afirmação de que para todo $\bar{c} \in C^m$ e para todo $p \in P$, o conjunto $p \cup \{\psi(\bar{c})\}$ é satisfeito em algum $M \in \mathcal{M}$. □

Como conseqüência imediata deste teorema, temos o seguinte resultado:

Lema 3.1 Se $\mathcal{M}$ for uma classe de modelos de um conjunto de $\forall\vee\exists$ sentenças de L_A, então todo modelo $\mathcal{M}$-genérico pertencerá à classe $\mathcal{M}$. □

Uma classe $\mathcal{M}$ de modelos de um conjunto de $\forall\vee\exists$ sentenças de L_A será chamada de uma **$\forall\vee\exists$-classe**.

Teorema 3.2 (Teorema da Omissão de Tipos - Versão I) Seja $\mathcal{M}$ uma $\forall\vee\exists$-classe e sejam $\phi_n = \forall x_1 \ldots \forall x_{m_n} \psi_n(\bar{x})$, $n < \omega$, uma seqüência de $\forall\vee\exists$-sentenças de L_A. Suponhamos que para cada $n < \omega$, para cada pedaço finito p de $\mathcal{M}$ e para cada $\bar{c} \in C^{m_n}$, o conjunto $p \cup \{\psi_n(\bar{c})\}$ seja satisfeito em alguma $M \in \mathcal{M}$. Então $\mathcal{M}$ contém um modelo enumerável M que satisfaz cada ϕ_n.

Demonstração: Podemos assumir que o fragmento L_A contém todas as sentenças ϕ_n do enunciado. Então qualquer modelo $\mathcal{M}$-genérico pertence a $\mathcal{M}$ e satisfaz cada uma das ϕ_n. □

O mesmo pode ser feito com a propriedade de *forcing* $\mathbb{P}(\mathcal{M}, \Phi)$. Seja $\mathcal{M}$ uma classe não vazia de L-estruturas e seja Φ um conjunto não vazio e finito ou enumerável de $L(C)_{\omega_1\omega}$-fórmulas, cada uma delas com uma quantidade finita de variáveis livres, e contendo as fórmulas básicas. Dizemos que uma $L(C)$-fórmula é Φ-básica se pertencer a Φ. Um pedaço Φ finito de algum $M \in \mathcal{M}$ é um conjunto finito p de $L(C)$-sentenças Φ-básicas satisfeitas em M para alguma interpretação das constantes de C ocorrendo nelas. Seja

$\mathbb{P}(\mathcal{M},\Phi) = (\mathbb{P}, f)$ dada por: $\mathbb{P}$ é a ordem parcial de todos os pedaços Φ finitos p de estruturas $M \in \mathcal{M}$, com a ordem $\leq$ dada por $\supseteq$, e $f(p)$ o conjunto de todas as sentenças atômicas contidas em p. Denotaremo por $\Phi(C)$ o conjunto de $L(C)_A$ sentenças obtidas das fórmulas de Φ pela substituição de suas variáveis livres por constantes de C. Como, por hipótese, cada $\phi \in \Phi$ só apresenta uma quantidade finita de variáveis livres, o conjunto $\Phi(C)$ será enumerável.

Uma L_A-fórmula ϕ será chamada de $\forall\vee\exists$-fórmula sobre Φ se for da seguinte forma:

$$\forall x_1 \ldots \forall x_m \bigvee_{n<\omega} \exists y_1 \ldots \exists y_{i_n} \left(\varphi_{n,1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{n,j_n}\right),$$

sendo que cada $\varphi_{k,r}$ é uma fórmula de Φ. Denotemos por $\psi(\bar{x})$ a fórmula $\bigvee_{n<\omega} \exists y_1 \ldots \exists y_{i_n} (\varphi_{n,1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{n,j_n})$.

Lema 3.2 Seja p uma condição em $\mathbb{P}(\mathcal{M},\Phi)$ e seja $\phi \in \Phi(C)$. Se $p \models \phi$ (conseqüência lógica), então $p \Vdash^* \phi$. Se $p \Vdash^* \phi$, então o conjunto $p \cup \{\phi\}$ é consistente.

Demonstração: Faremos uma indução na complexidade de ϕ, sendo que o passo inicial, o caso de ϕ atômica, é fácil, pois $p \Vdash \phi$ se, e somente se, $\phi \in p$; e se $p \nVdash^* \phi$, então existe $q \leq p$, tal que $q \Vdash \neg\phi$ e, portanto, não podemos ter que $p \models \phi$, pelo Lema 2.1 e da definição dessa propriedade de *forcing*.

Suponhamos que este lema seja verdadeiro para todas as fórmulas com menos símbolos lógicos que ϕ e seja $q \leq p$.

Caso 1: $\phi = \neg\psi$. Suponhamos que $p \models \neg\psi$. Então $q \models \neg\psi$ e, portanto, $q \cup \{\psi\}$ não é consistente. por hipótese de indução, temos que $q \nVdash^* \psi$, ou seja, existe $r \leq q$, tal que $r \Vdash \neg\psi$. Assim, $p \Vdash^* \neg\psi$.

Agora, suponhamos que $p \Vdash^* \neg\psi$. Então, $q \Vdash^*$, o que implica que $q \nVdash^* \psi$. Por hipótese de indução, $q \not\models \psi$ e, portanto, $q \cup \{\neg\psi\}$ é um conjunto consistente. Isto implica que $p \cup \{\neg\psi\}$ também é um conjunto consistente.

Caso 2: $\phi = \bigvee_{\psi\in\Psi} \psi$. Suponhamos que $p \models \bigvee_{\psi\in\Psi} \psi$. Então $q \models \bigvee_{\psi\in\Psi} \psi$. Como q é satisfeita em algum $M \in \mathcal{M}$, existe alguma $\psi \in \Psi$, tal que $M \models \psi$. Isto quer dizer que $r = q \cup \{\psi\}$ é uma condição em $\mathbb{P}(\mathcal{M},\Phi)$, pois $\psi \in \Phi(C)$. Temos que $r \leq q$ e $r \models \psi$. Por hipótese de indução, $r \Vdash^* \psi$, o que implica que $s \Vdash \psi$, para alguma condição $s \leq r$. Portanto $s \Vdash \bigvee_{\psi\in\Psi} \psi$, ou seja, $p \Vdash^* \bigvee_{\psi\in\Psi} \psi$.

Agora, suponhamos que $p \Vdash^* \bigvee_{\psi\in\Psi}\psi$, ou seja, para algum $r \leq q$, $r \Vdash \bigvee_{\psi\in\Psi}\psi$, o que implica que $r \Vdash \psi$, para alguma $\psi \in \Psi$. Por hipótese de indução, $r \cup \{\psi\}$ é consistente e, postanto $p \cup \{\psi\}$ também o será. Mas isto implica que $p \cup \{\bigvee_{\psi\in\Psi}\psi\}$ é consistente.

Caso 3: $\phi = \exists x\,\psi(x)$. Suponhamos que $p \models \exists x\,\psi(x)$. Então $q \models \exists x\,\psi(x)$ e, como q é satisfeita em algum $M \in \mathcal{M}$, $\exists x\,\psi(x)$ também o será. Seja $c \in C$ um símbolo de constante que não ocorra em nenhuma fórmula de q e nem em $\exists x\,\psi(x)$ – tal constante existe, pois $\exists x\,\psi(x) \in \Phi(C)$ o que implica que a fórmula $\exists x\,\psi(x)$ pode conter somente uma quantidade finita delas, e o mesmo se dá com as fórmulas em q. Com isto, temos que $r = q \cup \{\psi(c)\}$ é satisfeita em M, com a interpretação conveniente da constante c, ou seja, r é também uma condição e $r \models \psi(c)$. Por hipótese de indução, $r \Vdash^* \psi(c)$ e, portanto $s \Vdash \psi(c)$, para alguma condição $s \leq r$. Portanto $s \Vdash \exists x\,\psi$, o que implica que $p \Vdash^* \exists x\,\psi$.

A demonstração de que $p \Vdash^* \exists x\,\psi$ implica que $p \cup \{\exists x\,\psi\}$ é consistente é parecida com a do caso 2, depois das observações acima. □

Com isto, podemos generalizar os resultados anteriores, com pequenas modificações nas respectivas demonstrações.

Teorema 3.3 Seja $\mathcal{M}$ uma classe de L-estruturas. Uma $\forall\vee\exists$-sentença $\phi = \forall\bar{x}\psi(\bar{x})$ sobre ϕ será satisfeita em todos os modelos $\mathcal{M}$-genéricos se, e somente se, para todo pedaço finito de $\mathcal{M}$ e para toda m-upla de constantes $\bar{c} \in C^m$, o conjunto $p \cup \{\psi(\bar{c})\}$ for satisfeito em alguma $m \in \mathcal{M}$. □

Teorema 3.4 (Teorema da Omissão de Tipos II) Seja $\mathcal{M}$ uma $\forall\vee\exists$-classe e sejam $\phi_n = \forall x_1 \dots \forall x_{m_n}\psi_n(\bar{x})$, $n < \omega$, uma seqüência de $\forall\vee\exists$-sentenças sobre Φ de L_A. Suponhamos que para cada $n < \omega$, para cada pedaço Φ finito p de $\mathcal{M}$ e para cada $\bar{c} \in C^{m_n}$, o conjunto $p \cup \{\psi_n(\bar{c})\}$ seja satisfeito em alguma $M \in \mathcal{M}$. Então $\mathcal{M}$ contém um modelo enumerável M que satisfaz cada ϕ_n. □

4 Aplicação: Grupos Algebricamente Fechados

Lembramos que um grupo é uma estrutura sobre a assinatura $L = \{\cdot, 1, ^{-1}\}$, satisfazendo o conjunto $\mathbf{\Sigma}$ contendo os seguintes três axiomas:

1. $\forall x \forall y \forall z[(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)]$
2. $\forall x[x \cdot 1 = x \wedge 1 \cdot x = x]$
3. $\forall x[x \cdot x^{-1} = 1 \wedge x^{-1} \cdot x = 1]$

Observe-se que a classe $\mathcal{M}$ de todos os grupos é uma $\forall\vee\exists$-classe.

Seja $n \in \mathbb{N}$. Denotaremos por x^n o termo dado por: $x^0 = 1$, $x^{n+1} = x \cdot x^n$.

Um grupo G é um grupo de torsão se $G \models \forall x \bigvee_{0<n<\omega} x^n = 1$. Um grupo g é chamado de grupo divisível se $G \models \bigwedge_{0<n<\omega} \forall x \exists y\, (y^n = x)$.

Aplicando os resultados da seção anterior, obtemos o seguinte resultado:

Teorema 4.1 Seja $\mathcal{G}$ uma $\forall\vee\exists$-classe de grupos.

1. Suponha que para cada pedaço finito de $\mathcal{G}$ e cada $c \in C$, existe $n > 0$, tal que $p \cup \{c^n = 1\}$ seja satisfeito em algum $G \in \mathcal{G}$. Então $\mathcal{G}$ contém um grupo de torsão. Na verdade, todo grupo G que seja $\mathcal{G}$-genérico é de torsão.
2. Suponha que para cada $n > 0$ e cada pedaço finito p de $\mathcal{G}$, o conjunto $p \cup \{\exists y\, (y^n = c)\}$ seja satisfeito em algum $G \in \mathcal{G}$. Então $\mathcal{G}$ contém um grupo divisível. Na verdade, todo grupo $\mathcal{G}$-genérico é divisível.

Demonstração: Em qualquer um dos dois casos, o Teorema 3.1 dá a resposta adequada. $\square$

Dizemos que o grupo G é algebricamente fechado se, para todo conjunto finito $p(\bar{x}, \bar{y})$ de fórmulas básicas e todo $\bar{c} \in C^n$, se existe $H \supseteq G$, tal que $H \models \exists \bar{y} \bigwedge p(\bar{c}, \bar{y})$, então $G \models \exists \bar{y} \bigwedge p(\bar{c}, \bar{y})$.

Sejam G_0 um grupo finito ou enumerável e $\mathcal{G}_0$ a classe dos grupos $G \supseteq G_0$. Uma extensão genérica de G_0 é qualquer grupo G, tal que a espansão

$(G,a)_{a\in G_0}$ (na assinatura $L(G_0)$) seja $\mathcal{G}_0$-genérico para a linguagem na assinatura $L(G_0)$. Observe-se que, considerando essa assinatura, a classe $\mathcal{G}_0$ é uma $\forall\vee\exists$-classe.

Teorema 4.2 Toda extensão genérica de um grupo enumerável é algebricamente fechado.[6]

Demonstração: Já sabemos que todo grupo $\mathcal{G}_0$-genérico pertence à classe $\mathcal{G}_0$. Como estamos trabalhando com a assinatura $L(G_0)$, todo grupo $\mathcal{G}_0$-genérico G é uma extensão de G_0, que será enumerável, porque G_0 também o é.

Sejam G um grupo $\mathcal{G}_0$-genérico, $p(\bar{x},\bar{y})$ um conjunto finito de $L(G_0)$-fórmulas básicas, $\bar{c}\in C^n$, e $H\supseteq G$ um grupo tal que $H\models\exists\bar{y}\bigwedge p(\bar{c},\bar{y})$. Queremos mostrar que $G\models\exists\bar{y}\bigwedge p(\bar{c},\bar{y})$.

Seja $\mathbb{G}$ um conjunto genérico que gera o modelo $(G,g_c)_{c\in C}$. Sejam $q\in\mathbb{G}$ e $\bar{d}\in D^m$, tais que as constantes $\bar{d}$ não ocorram nas fórmulas de q e nem em $\bar{c}$. Como $q\in\mathbb{G}$, temos que $G\models q$ e o conjunto $p(\bar{c},\bar{d})\cup q$ é satisfeito em uma extensão de G (que forçosamente está em $\mathcal{G}_0$), ou seja, esse conjunto é um pedaço finito de $\mathcal{G}$. Usando o Lema 2.1, obtemos que $p(\bar{c},\bar{d})\cup q\Vdash^*\exists\bar{y}\bigwedge p(\bar{c},\bar{y})$, o que implica que $q\nVdash\neg\exists\bar{y}\bigwedge p(\bar{c},\bar{y})$. Como o elemento $q\in\mathbb{G}$ era arbitrário, nenhum elemento $q\in\mathbb{G}$ pode forçar $\neg\exists\bar{y}\bigwedge p(\bar{c},\bar{y})$ e, portanto, $(G,g_c)_{c\in C}\models\exists\bar{y}\bigwedge p(\bar{c},\bar{y})$, ou seja, G é algebricamente fechado. $\square$

Seja G um grupo (finitamente) gerado pelos elementos $g_1,\ldots,g_n\in G$ (isto é, para cada $g\in G$, existe um $L(\{c_1,\ldots,c_n\})$-termo t sem variáveis, tal que $(G,g_1,\ldots,g_n)\models t=g$). Uma apresentação de G é um conjunto $\mathbb{A}$ de equações nas constantes $c_1,\ldots,c_n$ (isto é, $s(\bar{c})=t(\bar{c})$, sendo que $t(\bar{x})$ é um L-termo), tal que

1. $(G,g_1,\ldots,g_n)\models\mathbb{A}$;
2. se $(G,g_1,\ldots,g_n)\models t_1(\bar{c})=t_2(\bar{c})$, então $\mathbf{\Sigma}\cup\mathbb{A}\vdash t_1(\bar{c})=t_2(\bar{c})$.

Um grupo finitamente gerado G é recursivamente apresentado se o conjunto $\mathbb{A}$ for recursivo. O grupo G tem o problema da palavra resolúvel se o conjunto de todas as equações satisfeitas em G formar um conjunto recursivo.

[6] A. Robinson, *Forcing in Model Theory*, 1st. Nat. Alta Math., Symposia Math., **5** (1970), 69-82.

Teorema 4.3 Uma condição suficiente para que o grupo finitamente gerado G, recursivamente apresentado, tenha o problema da palavra resolùvel é que G possa ser incluído em todo grupo algebricamente fechado.[7]

Demonstração: Seja G um grupo finitamente gerado, com geradores g_1, ..., g_n, e suponhamos que G não seja recursivamente apresentado com um preoblema da palavra resolúvel. Seja $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ o conjunto de todas as L-fórmulas básicas que não sejam satisfeitas em G pelos elementos $g_1, \ldots, g_n$. Como as fórmulas básicas são equações e desigualdades, pela hipótese sobre G, o conjunto Φ não pode ser recursivo. Portanto G não poderá ser incluído num grupo H se, e somente se

(1) $H \models \forall x_1 \ldots \forall x_n \bigvee_{\phi \in \Phi} \phi(\bar{x})$.

De fato, se valer (1), claramente $G \nsubseteq H$. Reciprocamente, se não valer (1), teremos que $H \models \exists x_1 \ldots \exists x_n \bigwedge_{\phi \in \Phi} \neg\phi(\bar{x})$ e se $h_1, \ldots, h_n \in H$ são testemunhas de tal existência, a aplicação que leva cada g_i em h_i poderá ser estendida a uma inclusão de grupos $G \to H$.

Do modo como foi definido o conjunto Φ, temos que, para cada fórmula atômica $\phi(x_1, \ldots, x_n)$, exatamente uma das fórmulas entre ϕ e $\neg\phi$ pertence a Φ. Isto implica que o conjunto Φ não poderá ser r.e. (recursivamente enumerável), pois, senão, seu complemento também seria r.e. e, portanto, Φ seria recursivo.

Seja, agora, L_A um fragmento enumerável contendo a fórmula $\bigvee_{\phi \in \Phi} \phi(\bar{x})$. Mostraremos que todo grupo genérico satisfará a propriedade (1).

Sejam $c_1, \ldots, c_n \in C$ e seja p um pedaço finito de $\mathcal{G}$. Seja $\Psi = \Psi(x_1, \ldots, x_n)$ o conjunto de todas as L-fórmulas básicas $\psi((x_1, \ldots, x_n)$, tais que $p \cup \{\psi(\bar{c})\}$ não seja um pedaço finito de $\mathcal{G}$ (isto é, $p \cup \{\psi(\bar{c})\}$ não será uma condição), o que implica que $\mathbf{\Sigma} \cup p \cup \{\psi(\bar{c})\}$ não é consistente e, portanto, que $\mathbf{\Sigma} \cup p \vdash \neg\psi(\bar{c})$.

Disto concluímos que, para cada fórmula atômica ψ, no máximo uma dentre ψ e $\neg\psi$ pertencerá a Ψ. Como o conjunto de todas as sentenças demonstradas a partir de uma teoria é r.e., concluímos também que o conjunto Ψ é r.e. Das definições e propriedades de Φ e Ψ, segue que $\Phi \nsubseteq \Psi$

[7]Este Teorema deve-se a A. Macintyre, *Omitting quantifier free types in generic structures*, The Journal of Symb. Logic, **37** (1970), 512-520. Essa condição também é necessária e isso foi provado posteriormente por B. H. Neumann, *The isomorphism problem for algebraically closed groups*, em Word Problems, North Holland, Amsterdã, 1973, 553-562.

(ambos são conjuntos de fórmulas básicas!). Portanto, existe $\psi \in \Phi \setminus \Psi$, e $p \cup \{\phi(\bar{c})\}$ é um pedaço finito de $\mathcal{G}$.

Assim, o Teorema 3.1 implica que todo grupo genérico satisfaz a propriedade (1) e o teorema anterior diz que tais grupos são algebricamente fechados. □

5 Noções de *Forcing* em Teoria dos Conjuntos

Vamos apresentar[8] agora a teoria do *forcing* em Teoria dos conjuntos.

A Teoria dos Conjuntos deveria ser chamada, na verdade, de Teorias dos Conjuntos, no plural, pois há mais de uma axiomatização em voga. A mais usada é a Teoria de Zermello e Fraenkel, ZF, que na verdade é também de Skolem, cujos axiomas na assinatura $L^{ZF} = \{\in\}$ são:

1. **Extensionalidade**: $\forall x, y\,((x = y) \leftrightarrow \forall z\,(z \in x \leftrightarrow z \in y))$ (ou seja, todo conjunto é determinado por sua extensão (seus elementos).

2. **Existência do Conjunto Vazio**: $\exists x \forall y \neg(y \in x)$ (usamos o símbolo *metalinguístico*[9] $\varnothing$ (ou também $\emptyset$) para designar tal conjunto, que, pelo axioma da extendsionalidade, é único.

3. **Par não ordenado**: $\forall a, b \exists z \forall t (t \in z \leftrightarrow (t = a \vee t = b))$ (usamos o símbolo *metalinguístico* $\{a, b\}$ para designá-lo).

4. **União**: $\forall x \exists y \forall t (t \in y \leftrightarrow \exists w (w \in x \wedge t \in w))$ (usamos o símbolo *metalinguístico* $y = \bigcup x$ para designá-lo).

5. **Separação**: Para cada $\psi(\bar{x}, y)$ uma L^{ZF}-fórmula com variáveis livres $\bar{x}$ (para os parâmetros) e y, a sentença $\forall x, a \exists b \forall y ((y \in b) \leftrightarrow (y \in a \wedge \psi(\bar{x}, y)))$ (usamos o símbolo *metalinguístico* $b = b(\bar{x}) = \{y \in a : \psi(\bar{x}, y)\}$ para designá-lo).

[8] Os resultados desta seção são baseados nas exopsições de H. J. Keisler, já citado, de J. R. Shoenfield, *Unramified Forcing*, Axiomatic Set Theory, proc. Symp. Pure Math. Vol. XIII, part I, AMS, 1971, p. 357-381; em na monografia de P. Cohen já citada.

[9] Em uma linguagem mais ampla para descrevermos o que estamos fazendo.

6. **Substituição**: Para cada $\psi(x, y)$ uma L^{ZF}-fórmula com variáveis livres x e y (e possivelmente outras, para os parâmetros), a sentença

$$(\forall x, y, z((\psi(x, y) \wedge \psi(x, z)) \rightarrow (y = z))) \rightarrow$$

$$\forall a \exists b \forall y(y \in b \leftrightarrow \exists x(x \in a \wedge \psi(x, y)))$$

(ou seja, se ψ define uma função, a imagem do conjunto a é um conjunto b – se houver variáveis para parâmetros, deverão ser quantificadas universalmente no começo da fórmula).

7. **Partes**: $\forall x \exists y \forall z(\forall t(t \in z \rightarrow t \in x) \rightarrow (z \in y))$ ((usamos o símbolo *metalinguístico* $y = \mathcal{P}(x)$ para designá-lo).

8. **Existência de um conjunto infinito**: $\exists x((\exists y(\forall z(\neg z \in y)) \wedge y \in x) \wedge \forall z(z \in x \rightarrow \exists y(z \in y \wedge y \in x)))$ (ou seja, $\varnothing \in x$ e, se $z \in x$ então existe $y \ni z$, tal que $y \in x$).

9. **Regularidade**: $\forall x \exists y(y \in x \wedge \forall z(z \in y \rightarrow \neg(z \in x)))$ (ou seja, existe $y \in x$, tal que $y \cap x = \varnothing$, sendo que $y \cap x$ é definido pela fórmula $t \in y \wedge t \in x$ e sua existência deve-se ao axioma da substituição).

10. **Axioma da Escolha:** Este axioma não faz parte de ZF e sua adjunção a ZF cria uma nova teoria ZFE: $\forall x[(\exists y(y \in x) \wedge (\forall y(y \in x \rightarrow \exists z(z \in y)))) \rightarrow \exists w((\forall t(t \in w \rightarrow \exists y(y \in x \wedge t \in y)) \wedge \forall y(y \in x \rightarrow \exists t(t \in y \wedge t \in w \wedge \forall s((s \in y \wedge s \in w) \rightarrow s = t)))))]$ – isto tudo quer dizer que se x for uma família não vazia de conjuntos não vazios y, então existe um conjunto w que contém exatamente um elemento de cada $y \in x$.

Outro axioma refere-se aos conjuntos construtíveis de Gödel – existe uma fórmula $L(x)$ (que não será explicitada neste texto) dizendo que x é definível por uma fórmula de ZF usando como parâmetros conjuntos previamente definidos. Em particular, podemos tomá-los como sendo ordinais. O Axioma da Construtibilidade afirma que $\forall x\, L(x)$ e é denotado na literatura como $V = L$.

Teorema 5.1 (Gödel)[10] Para cada axioma ϕ de ZFE, $ZF \vdash \phi^{L(x)}$, e também $ZF \vdash V = L \rightarrow \forall \kappa 2^\kappa = \kappa^+$ (a Hipótese Generalizada do Contínuo.

[10] Consulte algum livro de Teoria dos Conjuntos que trate do tema: por exemplo, seguimos o livro de P. Cohen, *Set Theory and the Continuum Hypothesis*, já mencionado.

□

Como o Segundo Teorema da Incompletude de Gödel diz que não podemos demonstrar em ZF sua própria consistência, o que vale dizer que não podemos demonstrar a existência de um modelo para ZF, assumiremos essa existência como um axioma a mais.

Lembramos que um conjunto M é transitivo se para todo $x \in M$ e todo $y \in x$, temos que $y \in M$. Lembramos também que o Axioma da Regularidade traz uma estratificação do universo dos conjuntos, definindo-se $V_0 = \varnothing$, $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$ e $V_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} V_\alpha$, se λ for um ordinal limite. O posto de um elemento $xinV$ é o menor ordinal α, tal que $x \in V_\alpha$.

Lema 5.1 Um conjunto transitivo M será um modelo de ZF (ou, mais precisamente, $(M, \in)$ será uma modelo de ZF) se satisfizer as quatro condições a seguir:

1. $\omega \in M$;
2. para todo $A \subseteq M$, se existir $x \in M$, tal que $A \subseteq x$, então $A \in M$;
3. para toda fórmula "$y = F(x)$"(isto é, uma fórmula tal que $M \models \forall x, y, z((y = F(x) \wedge z = F(x)) \to (y = z)))$ e para todo $a \in M$, se $b = \{y : \exists x \in \mathrm{dom}\,(F) \cap M,\ (y = F(x))\}$, então $b \in M$;
4. para todo $a \in M$, existe $b \in M$, tal que $\mathcal{P}(a) \cap M \subseteq b$.

Demonstração: Por ser transitivo o conjunto M, valem os axiomas da extensionalidade, da existência do conjunto vazio e o da regularidade. O item 1 implica que vale também o axioma do infinito; o item 3 implica que vale o axioma da substituição; o item 2 implica que vale o da separação e os itens 2 e 4 implicam que vale o axioma das partes. Se $F(x) = \cup x$, como vale o axioma da substituição em M, se $x \in M$, então $\cup x \in M$ (pois $\cup x \in M$), ou seja, vale o axioma da união. Como $\{a, b\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(a \cup b))$, vale também o axioma do par não ordenado em M. □

A existência de um conjunto transitivo M, tal que $(M, \in)$ seja modelo de ZF é um axioma um pouco mais forte do que simplesmente assumir a consistência de ZF. Por conveniência, usaremos tal axioma, mas lembramos que todas as demonstrações de independência em ZF podem ser reduzidas a demonstrações puramente sintéticas, da forma $ZF \vdash \text{Consis}_{ZF} \rightarrow \text{Consis}_{ZF+\phi}$. Antes de prosseguirmos, vamos apresentar duas limitações quanto às demonstrações de independência em ZF, s primeira diz respeito ao uso de modelos internos e a segunda impœ o uso de modelos enumeráveis.

Teorema 5.2 (Gödel) Seja M uma classe transitiva que seja modelo de ZF. Então existe uma subclasse M^L de M que é modelo de $ZF + V = L$. Ou seja, não existe subclasse própria de L. Em particular, supondo que existam conjuntos transitivos que sejam modelos de ZF, existe um modelo mínimo M que não conterá nenhum submodelo próprio de ZF, e que será modelo também de $V = L$. □

Teorema 5.3 É impossível demonstrar a independência da Hipótese do Contínuo, ou do Axioma da Escolha por modelos internos. Mais especificamente, dada uma L-fórmula $A(x)$, não se pode demonstrar em ZF (supondo que seja consistente) os axiomas de ZF e $\neg V = L$ relativizados à fórmula $A(x)$.

Demonstração: Seja M o modelo mínimo de ZF (e, portanto, de $V = L$). Então,para cada $A(x)$ definindo uma classe transitiva que seja modelo de ZF, $M \cap A = M$ e, portanto tem que ser modelo de $ZF + V = L$. Pode-se evitar o modelo mínimo usando argumentos mais enrolados. □

Teorema 5.4 Assumindo a existência de modelos transitivos para ZF, é impossível obter modelos não enumerável de ZFE em que não valha a Hipótese do Contínuo ($2^{\aleph_0} = \aleph_1$), ou mesmo que contenha um número real não construtível.

Demonstração: Seja M um modelo transitivo não enumerável de ZFE e seja $\alpha = \sup\{\eta \in M : \eta \text{ é um ordinal}\}$. Como M não é enumerável, se α fosse enumerável, existiria $\beta < \alpha$ tal que o subconjunto $R_\beta \subset M$ dos elementos de posto β seria não enumerável e, como vale o Axioma da Escolha em M, poderia ser bem ordenado e seu ordinal (não enumerável) estaria em M. Portanto α tem que ser não enumerável. O Axioma $V = L$ implica que todo número real é construtível a partir de um ordinal enumerável e, portanto, todo número real contido em M seria construtível, o que implicaria a Hipótese do Contínuo em M. $\square$

Esses dois resultados esboçados acima é que motivam a construção do *forcing*, e usando somente modelos enumeráveis.

Partindo de um modelo transitivo enumerável $M \models ZF + V = L$, se $P \in M$ for uma ordem parcial com $\mathbf{1} = \max P$, se $G \subset P$ for um genérico (em geral $G \notin M$), definiremos o modelo $M[G]$ como a extensão genérica de M construída a partir de M e de G.

A construção da propriedade de *forcing* em Teoria dos Conjuntos é um pouco diferente da que estamos fazendo neste texto, mas as duas chegam aos mesmos resultados. Em Teoria dos Conjuntos é comum definir a relação $p \Vdash \phi$ como "para todo genérico $G \ni p$, $M[G] \models \phi$"(parece-se com o *forcing* infinito de Robinson – veja os exercícios 6.2 e 6.3).

Comecemos com o enfoque usado normalmente usado em Teoria dos Conjuntos. Depois mostraremos como reduzi-lo ao enfoque usado neste texto. Em comum temos um modelo enumerável $M \models ZF + V = L$, expandimos a assinatura com novos símbolos de constantes $C = \{c_a : a \in M\}$, cotendo também um símbolo de constante G para o conjunto $\{\langle p, p\rangle : p \in P\} \in M$, que irá representar o genérico $G \subset P \in M$ (lembrando que $G \notin M$). Definimos uma nova relação $\in_G$ em M pela fórmula

$$a \in_G b \leftrightarrow (\exists p \in G)(\langle a, p\rangle \in b).$$

Observe-se que se $a \in_G b$, então o posto do elemento a é menor do que o de b. Daí, podemos definir recursivamente $K_G(b) = \{K_G(a) : a \in_G b\}$, obtendo $M[G] = \{K_G(a) : a \in M\}$. Observemos que, para cada $b \in M$, se definirmos recursivamente $\hat{b} = \{\langle \hat{a}, \mathbf{1}\rangle : a \in B\}$, então $K_G(\hat{b}) = b \in M[G]$, ou seja, existe uma inclusão natural de M em $M[G]$. O resultado principal desta seção é o teorema a seguir.

Teorema 5.5 O modelo $M[G]$ satisfaz os axiomas de ZFE, $M \subset M[G]$ e $G \in M[G]$. Além disso, esse é o menor modelo com estas propriedades.

Para a demonstração deste teorema, vamos definir primeiramente a noção de *forcing* fraco, da seguinte maneira. Suponhamos que os símbolos lógicos sejam $\vee$, $\neg$ e $\exists$ (como antes), e que os símbolos não lógicos sejam $\in$ e $\neq$ (desigualdade); os símbolos $\wedge$, $\rightarrow$ e $\forall$ serão usados como as abreviações usuais. Isto facilitará a exposição – observe-se que $x = y$ pode ser definido como $\neg(x \neq y)$.

Seja $\Vdash^*$ a seguinte relação entre elementos de P e $L(M)$-fórmulas, por indução na complexidade de ϕ e também no posto dos elementos representados pelas constantes de M:

1. $p \Vdash^* (a \in b)$ se $\exists c(\exists q \geq p)(\langle c, q\rangle \in b \wedge p \Vdash^* (a = c))$.
2. $p \Vdash^* (a \neq b)$ se $\exists c(\exists q \geq p)(\langle c, q\rangle \in a \wedge p \Vdash^* (c \notin b)) \vee \exists c(\exists q \geq p)(\langle c, q\rangle \in b \wedge p \Vdash^* (c \notin a))$
3. $p \Vdash^* \neg\phi$ se $(\forall q \leq p)\neg(q \Vdash^* \phi)$;
4. $p \Vdash \phi \vee \psi$ se $(p \Vdash^* \phi) \vee (p \Vdash^* \psi)$;[11]
5. $p \Vdash^* \exists x\, \phi$ se $\exists b\, (p \Vdash^* \phi(b))$.

Observe-se que os dois primeiros itens são definidos conjuntamente por recursão no posto de a e b, com o auxílio do terceiro item. Desta forma, se a linguagem pertencer a M, teremos que a relação $\Vdash^*$ será definível em M. Também temos que se $p \Vdash^* \phi$ e $q \leq p$, então $q \Vdash \phi$.

Lema 5.2 (Lema da Verdade) Se $G \subset P$ for genérico, então $M[G] \models \phi$ se, e somente se, existir $p \in G$, tal que $p \Vdash^* \phi$.

Demonstração: Provaremos este lema por indução na complexidade de ϕ.

O passo inicial é provado por indução no posto dos elementos a e b.

Provemos primeiramant um resultado auxiliar: se este lema for verdadeiro para ϕ, então:

(1) $a \in_G b$ e $M[G] \models \phi$ se, e somente se $(\exists p \in G)(\exists q \geq p)(\langle a, q\rangle \in b \wedge p \Vdash^* \phi$.

[11]Se quisermos trabalhar com um fragmento enumerável L_A de $L_{\omega_1\omega}$, suporemos que ele seja um elemento de M e, assim, poderíamos definir $p \Vdash^* \bigvee \Phi$ se $\exists \phi \in \Phi(p \Vdash^* \phi)$.

Suponha que $a \in_G b$ e $M[G] \models \phi$. Então existem $q, r \in G$, tais que $\langle a, q\rangle \in b$ e $r \Vdash^* \phi$. Seja $p \in G$, $p \leq q$ e $p \leq r$. Então $p \Vdash^* \phi$. Reciprocamente, suponhamos que $(\exists p \in G)(\exists q \geq p)(\langle a, q\rangle \in b \wedge p \Vdash^* \phi$. Então $M[G] \models \phi$ (por hipótese, este lema vale para ϕ) e como $q \geq p$, $q \in G$ e, portanto, $a \in_G b$.

Passemos à demonstração deste lema.

1. Pela definição de $K_G(x)$, temos que $M[G] \models (a \in b)$ é equivalente a $\exists c[c \in_G b \wedge M[G] \models (a = c)]$. Pela hipótese de indução (no posto de b) e por (1), esta última sentença é equivalente a

$$\exists c[(\exists inG)(\exists q \geq p)(\langle c, q\rangle \in b \wedge p \Vdash^* (a = c)]$$

e, portanto, também é equivalente a $(\exists p \in G)(p \Vdash^* a \in b)$.

2. Temos que $M[G] \models a \neq b$ se, e somente se, ou $\exists c[c \in_G \wedge M[G] \models c \notin b]$ ou $\exists c[c \in_G b \wedge M[G] \models c \notin a]$. Novamente, por hipótese de indução e por (1), isto é equivalente a

$$\exists c(\exists q \geq p)(\langle c, q\rangle \in a \wedge p \Vdash^* c \notin b) \vee \exists c(\exists q \geq p)(\langle c, q\rangle \in b \wedge p \Vdash^* c \notin a),$$

o que é equivalente a $(\exists p \in G)(p \Vdash^* a \neq b$.

3. Por hipótese, $M[G] \models \phi$ se, e somente se, $(\exists p \in G)(p \Vdash^* \phi$, ou seja, $M[G] \models \neg\phi$ se, e somente se, $\neg(\exists p \in G)(p \Vdash^* \phi$. Se provarmos que exatamente uma das asserções dentre $(\exists p \in G)(p \Vdash^* \phi)$ e $(\exists p \in G)(p \Vdash^* \neg\phi)$, obteremos o lema para $\neg\phi$. Seja $D = \{p \in P : p \Vdash^* \phi$ ou $p \Vdash^* \neg\phi\}$. Como a relação $\Vdash^*$ é definível em M e $P \in M$, o conjunto $D \in M$ e é denso em P (pois se $p \in P$, existe $q \leq p$, tal que $q \Vdash^* \phi$ e, portanto, $q \in D$, ou, senão, $p \Vdash \neg\phi$ e $p \in D$). Agora, se existissem $p, q \in G$, tais que $p \Vdash^* \phi$ e $q \Vdash^* \neg\phi$, seja $r \in G$, $r \leq p, q$. Daí, teríamos que $r \Vdash^* \phi$ (pois $r \leq p$) o que contradiria a hipótese de que $q \Vdash^* \neg\phi$. isto prova o caso da negação.

4 e 5. São mais imediatos e deixados como exercícios. $\square$

Se definirmos a relação $p \Vdash \phi$ se, para todo p-genérico $G \ni p$, $M[G] \models \phi$, teremos:

Teorema 5.6 Para todo $p \in P$ e toda fórmula ϕ, $p \Vdash \phi$ se, e somente se, $p \Vdash^* \neg\neg\phi$.

Demonstração: Observemos primeiramente que, pela definição da relação $\Vdash$ acima, $p \Vdash \phi$ é equivalente a $p \Vdash \neg\neg\phi$.

Suponhamos primeiramente que $p \Vdash^* \neg\neg\phi$. Pelo Lema da Verdade, Lema 5.2, para todo genérico $G \ni p$, $M[G] \models \neg\neg\phi$, ou seja, $M[G] \models \phi$ e, portanto $p \Vdash \phi$.

Reciprocamente, suponhamos que $\neg(p \Vdash^* \neg\neg\phi)$. Então existe $q \leq p$, tal que $q \Vdash^* \neg\phi$. Seja $G \ni q$ um genérico. Como $p \geq q$, $p \in G$, ou seja, G é um p-genérico e $M[G] \models \neg\phi$, pelo Lema 5.2, e, portanto, $\neg(p \Vdash \phi)$. $\square$

.

Vamos finalizar esta seção mostrando que o axioma $V = L$ é independente de ZFE e mesmo se admitirmos a Hipótese Generalizada do Contínuo. Mas antes, um lema auxiliar.

Lema 5.3 Sejam $M \models ZF$ transitivo e $M[G]$ uma extensão genérica de M. Então M e $M[G]$ contêm os mesmos ordinais.

Demonstração: Como $M \subset M[G]$, basta mostrar que se $\alpha \in M[G]$ for um ordinal, então $\alpha \in M$. Por indução, podemos mostrar que o posto de $K_G(a)$ não é maior do que o de a. A função posto é definível em ambas as estruturas e o de M é a restrição a M do posto de $M[G]$. Como um P-nome de um elemento de $M[G]$ é um elemento de M, se a for um nome para o ordinal α, seu posto é um elemento de M e, como α é menor ou igual ao seu posto e como M é transitivo, $\alpha \in M$, como queríamos. $\square$

Como consqüência imediata, $M \cap L = M[G] \cap L$ (ambos têm os mesmos conjuntos construtíveis).

Teorema 5.7 Seja $P \in M$ o conjunto das partes finitas de funções $f : \omega \to 2 = \{0, 1\}$ e $G \subset P$ um genérico. Então $G \notin M$ e, portanto, $M[G] \models V \neq L$.

Demonstração: Para cada $f \in M$, $f : \omega \to 2$, seja $D_f = \{p \in P : (\exists n \in \omega)(n \in \mathrm{dom}(p) \wedge p(n) \neq f(n))\}$. Então $D \in M$ e D é um denso em P. Como o genérico G tem interseção não vazia com cada um desses D_f, se $F = \bigcup G : \omega \to 2$, então $F \neq f$, para toda $f : \omega \to 2$, tal que $f \in M$. Portanto $F \notin M$ e, como observamos acima, $F \notin M[G] \cap L = M \cap L$. $\square$

6 Exercícios

Exercício 6.1 Preencha os detalhes da demonstração de que, dado p, existe um modelo p-genérico.

Exercício 6.2 Seja $\mathcal{M}$ uma classe não vazia de L-estruturas. Dizemos que uma $L(C)$-fórmula é básica se for atômica ou a negação de uma fórmula atômica. Um pedaço finito de algum $M \in \mathcal{M}$ é um conjunto finito de $L(C)$-sentenças básicas satisfeitas em M para alguma interpretação das constantes de C ocorrendo nelas – esses pedaços finitos serão chamados de condições. Seja $\mathbb{P}(\mathcal{M}) = (\mathbb{P}, f)$ dada por: $\mathbb{P}$ é a ordem parcial de todos os pedaços finitos p de estruturas $M \in \mathcal{M}$, com a ordem $\leq$ dada por $\supseteq$, e $f(p)$ o conjunto de todas as sentenças atômicas contidas em p. Mostre que $\mathbb{P}(\mathcal{M})$ é uma propriedade de *forcing*. (Este é o chamado ***forcing* infinito de Robinson**.)

Exercício 6.3 Ainda no contexto do exercício 6.2, mostre que $p \Vdash \phi$ se, e somente se, para todo genérico $G \ni p$ e todo modelo genérico M construído-se usando G, $M \models \phi$.

Exercício 6.4 Seja $\mathcal{M}$ uma classe não vazia de L-estruturas e seja Φ um conjunto finito ou enumerável de $L(C)_{\omega_1\omega}$-fórmulas, cada uma delas com uma quantidade finita de variáveis livres, e contendo as fórmulas básicas. Dizemos que uma $L(C)$-fórmula é Φ-básica se pertencer a Φ. Um pedaço Φ finito de algum $M \in \mathcal{M}$ é um conjunto finito p de $L(C)$-sentenças Φ-básicas satisfeitas em M para alguma interpretação das constantes de C ocorrendo nelas. Seja $\mathbb{P}(\mathcal{M}, \Phi) = (\mathbb{P}, f)$ dada por: $\mathbb{P}$ é a ordem parcial de todos os pedaços Φ finitos p de estruturas $M \in \mathcal{M}$, com a ordem $\leq$ dada por $\supseteq$, e $f(p)$ o conjunto de todas as sentenças atômicas contidas em p. Mostre que $\mathbb{P}(\mathcal{M}, \Phi)$ é uma propriedade de *forcing*.

Exercício 6.5 Seja L uma assinatura, $C = \{c_n : n \in \mathbb{N}\}$ um conjunto de novos símbolos de constantes, disjunto de L, e seja T uma L-teoria consistente. Uma condição relativa a T é um conjunto finito p de $L(C)$-sentenças básicas (vide o exercício 6.2), tal que $T \cup p$ seja consistente. Seja P_T o conjunto de tais condições, com a ordem $\leq$ sendo a inclusão $\supseteq$ e $\mathbf{1} = \varnothing$. Seja $f(p)$ o conjunto das sentenças atômicas em p. Mostre que $\mathbb{P}_T = ((P_T, \leq, \mathbf{1}), f)$ é uma propriedade de *forcing*. Este é o chamado ***forcing* finito** de A. Robinson.

Exercício 6.6 Sejam L, C e T como no exercício anterior. Denotamos por $T_\forall$ o conjunto de todas as L-sentenças universais (ou seja, logicamente equivalente a uma sentença da forma $\forall x_1 \ldots \forall x_m \phi$, com ϕ sem quantificadores). Seja p um conjunto finito de $L(C)$-sentenças básicas. Mostre que p é uma condição relativa a T se, e somente se, p for uma condição relativa a $T_\forall$.

Exercício 6.7 Ainda com as definições do exercício 6.5, se p for uma condição relativa a T, denotaremos por $T(p)^f$ o conjunto das L-sentenças (preste atenção à assinatura!), tais que $p \Vdash^* \phi$ (ou seja, $p \Vdash \neg\neg\phi$); denotaremos também por T^f a teoria $T(!)^f$, que se chama de **teoria *forcing* companheira de** T. Mostre que se p for uma condição relativa a T, então $T(p)^f$ é uma teoria consistente, tal que se $T(p)^f \vdash \phi$, então $\phi \in T(p)^f$, para toda L-sentença ϕ.

Exercício 6.8 Ainda estamos no contexto das definições do exercício 6.5. Mostre que se T for uma L-teoria consistente, então $T^f = (T_\forall)^f$.

Exercício 6.9 Ainda estamos no contexto das definições do exercício 6.5. Seja p uma condição relativa a T e ϕ uma $L(C)$-sentença universal. Mostre que $p \Vdash \phi$ se, e somente se, $T \cup p \vdash \phi$. Mostre que $T_\forall = (T^f)_\forall$. [Sugestão: indução na complexidade de ϕ.]

Exercício 6.10 Ainda estamos no contexto das definições do exercício 6.5. Seja $p = p(c_{i_0}, \ldots, c_{i_n})$ uma condição, tal que as constantes de C que aparecem em alguma sentença básica em p são aquelas mostradas. Sejam $t_1, \ldots, t_n$ $L(C)$-termos sem variáveis e denotemos por $p' = p(t_1, \ldots, t_n)$ a nova condição obtida de p pela troca das constantes c_{i_j} pelos termos t_j $(1 \leq j \leq n)$, respectivamente. Se $\phi = \phi(c_{i_1}, \ldots, c_{i_n}, c_{j_1}, \ldots, c_{j_r})$ for uma $L(C)$-sentença, cujaos símbolos de constantes de C são as mostradas, denotaremos por ϕ' a sentença obtida de ϕ pela troca das constantes c_{i_j} pelos termos t_j $(1 \leq j \leq n)$, respectivamente.

Mostre que $p \Vdash \phi$ se, e somente se, $p' \Vdash \phi'$. [Sugestão: indução na complexidade de ϕ.]

Exercício 6.11 Novamente no contexto das definições do exercício 6.5, seja P uma condição relativa a T. Mostre que se M for um modelo P-genérico, então $M \models T(p)^f$.

Exercício 6.12 Mostre que um grupo algebricamente fechado não pode ser finitamente gerado e é divisível.

Exercício 6.13 Mostre que não há circularidade na definição de $\Vdash^*$ em teoria dos conjuntos.

Exercício 6.14 Seja M um modelos transitivo e enumerável de ZF e $\mathbb{P} = (P, \leq, \mathbf{1}) \in M$ uma ordem parcial. Seja $M^{\mathbb{P}}$ a subclasse dos $\mathbb{P}$-nomes, definidos recursivamente como sendo os conjuntos contendo elementos da forma $\langle \bar{a}, p\rangle$, $\bar{a}$ também um $\mathbb{P}$-nome. Mostre que $M^{\mathbb{P}}$ é definível em M.

Exercício 6.15 Uma ordem parcial $(P \leq, \mathbf{1})$ é separativa se satisfizer

$$\forall x \forall y((\exists z(z \leq x \wedge z \leq y)) \to x = y).$$

Mostre que existe uma álgebra booleana (isto é, uma estrutura $\mathbb{B} = (B, \vee, \wedge, -, 0, 1)$, tal que $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$, $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$, $x \vee 0 = x$, $x \wedge 0 = 0$, $x \vee 1 = 1$, $x \wedge 1 = x$, $x \vee (-x) = 1$, $x \wedge (-x) = 0)$ completa (isto é, se $X \subset B$ for não vazio, existem $\sup X \in B$ e $\inf X \in B$, calculados pela ordem parcial $x \leq y \Leftrightarrow x \wedge y = x$) e uma inclusão $e : P \to B$, tal que:

1. se $x, y \in P$ e $x \leq y$, então $e(x) \leq e(y)$ (em B);
2. para todos $x, y \in P$, existirá $z \in P$, $z \leq x$ e $z \leq y$ se, e somente se, $e(x) \wedge e(y) \neq 0$.

[Sugestão: chamaremos um conjunto $U \subset P$ de corte se $p \leq q \in U \to p \in U$; sejam $U_p = \{x \in P : x \leq p\}$; um corte U é regular se $p \notin U \to \exists q \leq p(U \cap U_q = \varnothing)$; seja B o conjunto de todos os cortes regulares em P e $e(p) = U_p$, com $U \vee V = \overline{U \cup V}$ (o fecho da união), $\wedge = \cap$, $0 = \varnothing$, $1 = U_{\mathbf{1}}$ e $-U = \{p \in P : U \cap U_p = \varnothing\}$.]

Exercício 6.16 Seja $(P, \leq, \mathbf{1})$ uma ordem parcial não separativa (veja o exercício anterior). Mostre que $x \sim y \leftrightarrow \forall z(z \leq x \leftrightarrow z \leq y)$ é uma relação de equivalência, e o quociente de P por $\sim$ torna-se uma ordem parcial separativa.

Exercício 6.17 Seja $\mathbb{B}$ uma álgebra booleana completa e M um modelo transitivo de ZF. Definimos a classe $M^{\mathbb{B}}$ dos $\mathbb{B}$-nomes como sendo a classe dos conjuntos $x \in M$, tais que $(\forall y \in x)(\exists z \in M^{\mathbb{B}})(\exists p \in \mathbb{B})(\langle z, p\rangle \in x)$ e que x seja uma função $x : \mathrm{dom}(x) \subset M^{\mathbb{B}} \to \mathbb{B}$. Definimos, recursivamente em $a, b, a_1, \ldots, a_n \in M^{\mathbb{B}}$, com $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, os valores:

1. $||a \in b|| = \bigvee_{x \in \mathrm{dom}(b)}(||x = a|| \wedge b(x))$;
2. $||a \subset b|| = \bigwedge_{x \in \mathrm{dom}(a)}(-a(x) \vee ||x \in b||)$;
3. $||a = b|| = ||a \subset b|| \wedge ||b \subset a||$;
4. $||\bigvee_{\phi \in \Phi} \phi(\bar{a})|| = \sup\{||\phi(\bar{a})|| : \phi \in \Phi\}$, sendo que Φ é um conjunto de fórmulas, com $VL(\Phi) = \{x_1, \ldots, x_n\}$;
5. $||\neg\phi(\bar{a})|| = -||\phi(\bar{a})||$;
6. $||\exists x\, \phi(x, \bar{a})|| = \sup\{||\phi(b, \bar{a})|| : b \in M^{\mathbb{B}}\}$.

O conjunto (ou classe) $M^{\mathbb{B}}$, junto com a função $||\phi(\bar{a})||$ assim definida é chamado de modelo a valores booleanos. Mostre que $||\phi|| = 1$, para todo axioma ϕ de ZFE (assumindo a teoria ZFE).

Exercício 6.18 Ainda no contexto do exercício anterior, mostre que $p \leq ||\phi(\bar{a})||$ define uma propriedade de *forcing* $p \Vdash \phi(\bar{a})$. Mostre que se $G \subset \mathbb{B}$ for um ultrafiltro, definindo recursivamente $K_G(x) = \{K_G(y) : ||y \in x|| \in G\}$ define uma classe $M[G]$, tal que $M[G] \models ZFE$, $M \subset M[G]$ e $G \in M[G]$ e que $M[G] \models \psi(K_G(a_1), \ldots, K_G(a_n))$ se, e somente se, existir $p \in G$, tal que $p \Vdash \phi(a_1, \ldots, a_n)$.

Exercício 6.19 Mostre como transformar a noção de *forcing* em teoria dos conjuntos para o contexto apresentado nas seções anteriores.

Índice Remissivo