Teoria dos Modelos: LISTA 2

Ricardo Bianconi

Entregar até o 30 de junho de 2009

> **Critério de Correção:** Faça quantos exercícios quiser. Escolherei os melhores de modo a somar até 10 (dois valendo 3,0 e dois valendo 2,0), 11 (três valendo 3,0 e um valendo 2,0) ou 12 pontos (quatro valendo 3,0).

Exercício 1 (3,0 pontos) Seja A_0 uma L-estrutura enumerável e seja $B_0 \preccurlyeq A_0$. Mostre que a $L \cup \{P_0\}$-estrutura $M_0 = (A_0, P_0^{M_0})$, em que o símbolo relacional unário P_0 é interpretado como sendo o subconjunto $B_0 \subset A_0$, admite uma extensão elementar $M = (A, P_0^M) \succcurlyeq M_0$, tal que $|A| = \omega$, A é ω-homogêneo e, se $B \subseteq A$ for a interpretação do símbolo P_0 em M, então, como L-estruturas, $A \cong B$. [Sugestão: crie duas cadeias elementares $A_0 \preccurlyeq A_1 \preccurlyeq \ldots$ e $B_0 \preccurlyeq B_1 \preccurlyeq \ldots$ que se interpenetrem e que garantam que os limites A e B satisfaçam o enunciado.]

Exercício 2 (3,0 pontos) Seja L uma assinatura, L^* uma Skolemização de L e Σ_L a Teoria de Skolem correspondente (consulte as notas de aula). Mostre que, para cada L-fórmula ϕ, existe uma L^*-fórmula universal ψ, tal que $\models \psi \to \phi$ e $\Sigma_L \models \phi \to \psi$ (se quiserem, usem a relação $\vdash$ no lugar de $\models$ – são equivalentes).[Sugestão: uma das implicações é mais fácil de obter. Considere o conjunto $\{\psi \to \phi : \Sigma_L \models \phi \to \psi\}$.]

Exercício 3 (2,0 pontos) Mostre que se $(X, <)$ for uma seqüência de indiscerníveis em A e $X \subset B \preccurlyeq A$, então $(X, <)$ também é seqüência de indiscerníveis em B.

Exercício 4 (2,0 pontos) Suponha que I seja um isomorfismo parcial entre A e B ($I \subset A^{<\omega} \times B^{<\omega}$) e que $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle \, I \, \langle b_1, \ldots, b_n\rangle$. Mostre que existe um isomorfismo parcial entre as $L\{c_1, \ldots, c_n\}$-estruturas $(A, a_1, \ldots, a_n)$ e $(B, b_1, \ldots, b_n)$.

Exercício 5 (3,0 pontos) Seja L a assinatura contendo apenas um símbolo funcional unário F e um símbolo realcional binário $\leq$. Seja T a L-teoria contendo os seguintes axiomas:

1. $\leq$ é uma ordem linear densa sem mínimo nem máximo;
2. F é uma bijeção estritamente crescente (ou seja, um automorfismo da ordem);
3. para todo x, $x < F(x)$ (ordem estrita).

Escreva explicitamente tais axiomas como L-sentencças. Mostre que T é completa (usando o método dos modelos recursivamente saturados).

Exercício 6 (3,0 pontos) Seja $\mathcal{M}$ a classe de todos os corpos de característica zero na assinatura $L = \{0, 1, +, -, \cdot\}$. Mostre que todo modelo $\mathcal{M}$-genérico é um corpo algebricamente fechado.