Teoria dos Modelos: Modelos Saturados

Ricardo Bianconi

Sumário

1 Introdução: Linguagens Recursivas

Saturação é uma propriedade de modelos realizarem tipos, o oposto ´ omissão de tipos.

Veremos primeiramente a propriedade de saturação recursiva, que se refere à realização de conjuntos recursivos de fórmulas e, por isso, precisamos definir o que vem a ser isto.

Sejam $V_0 = \varnothing$ e, se $n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = \mathcal{P}(V_n)$ (o conjunto das partes – ou subconjuntos – de V_n) e $V_\omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$. Seja L_{ZF} a assinatura contendo apenas o símbolo de relação binária $\in$.

Dizemos que uma L_{ZF}-fórmula é Δ_0^0 (ou Π_0^0, ou também Σ_0^0) se for logicamente equivalente a uma fórmula sem quantificadores, ou da forma $\exists x(x \in y \wedge \psi)$ ou $\forall x(x \in y \to \psi)$, sendo que ψ também é considerada como Δ_0^0 e a variável y é distinta da variável x. Se θ for fórmula Π_n^0 (ou, respectivamente, Σ_n^0) e ϕ for equivalente a $\exists x\, \theta$ (ou a $\forall x\, \theta$, respectivamente), então dizemos que ϕ é Σ_{n+1}^0 (ou, respectivamente, Π_{n+1}^0), sendo y distinta de x. Se

ϕ for, ao mesmo tempo, equivalente a uma fórmula Σ_n^0 e a uma outra fórmula Π_n^0, diremos que ϕ é Δ_n^0. Se θ for fórmula Π_n^0 (ou, respectivamente, Σ_n^0) e ϕ for equivalente a $\exists x(x \in y \wedge \theta)$ ou a $\forall x(x \in y \rightarrow \theta)$, então dizemos que ϕ é Π_n^0 (ou, respectivamente, Σ_n^0), sendo y distinta de x.

Diremos que o subconjunto $A \subset V_\omega$ é recursivamente enumerável, ou abreviadamente r.e., se for definido por uma fórmula ϕ Σ_1^0, ou seja, $A = \{a \in V_\omega : (V_\omega, \in) \models \phi(a)\}$. Dizemos que tal conjunto é recursivo se tanto A quanto $V_\omega \setminus A$ forem recursivamente enumerável (e portanto A é definível por fórmula Δ_1^0).

Identificando o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ com o subconjunto $\omega \subset V_\omega$ (ou seja, 0 é identificado como conjunto $\varnothing$ e $n+1$ com o conjunto correspondente a $\{0, \ldots, n\}$), podemos codificar assinaturas e linguagens em V_ω usando índices em ω. Mas os detalhes de tais possíveis codificações serão deixados para outra ocasião (veja o texo sobre a Incompletude). Para o que vem a seguir, basta sabermos que:

1. podemos definir a soma e o produto em ω, imitando as operações de $\mathbb{N}$ por fórmulas Δ_1^0;

2. podemos definir uma espécie de *assinatura maximal*, por exemplo contendo conjuntos disjuntos $C = \{c_s : s \in 2^{<\omega}\}$, $F = \{f_{n,s} : n \in \omega$ e $s \in 2^{<\omega}\}$ e $R = \{R_{n,s} : n \in \omega$ e $s \in 2^{<\omega}\}$, sendo que poderemos codificar cada símbolo como par ordenado ($c_s = (0, s)$, $F_{n,s} = ((0, n), s)$ e $R_{n,s} = ((1, n), s)$), etc;

3. podemos definir os símbolos de variáveis por $x_n = (1, n)$ e os símbolos lógicos como $\wedge = (2, 0)$, $\vee = (2, 1)$, $\neg = (2, 2)$, $\rightarrow = (2, 3)$, $\exists x_n = (3, n)$, $\forall x_n = (4, n)$ e, se quisermos, códigos para símbolos de separação (vírgula e parênteses);

4. fórmulas são seqüências finitas de símbolos, satisfazendo as regras usuais de construção, etc.

As assinaturas que usaremos serão assumidas como subconjunto recursivo da assinatura maximal, cujo complemento seja infinito nessa assinatura.

2 Modelos Recursivamente Saturados

Dada uma assinatura recursiva L, dizemos que uma L-estrutura M é recursivamente saturada se, para todo conjunto de novas constantes $C = \{c_1, \ldots, c_n\}$ e todo conjunto recursivo $\Gamma(x)$ de $L(C)$-fórmulas tendo no máximo como livre a variável x, que seja finitamente satisfatível em M, então M realiza Γ.

Nesta seção, assumiremos que L será uma assinatura recursiva (finita ou enumerável).

Teorema 2.1 Dada L-estrutura infinita M, existe $N \succ M$ de mesma cardinalidade, que é recursivamente saturada.

Demonstração: Como a quantidade de conjuntos recursivos $\Gamma(x)$ é no máximo enumerável, o método das constantes pode ser aplicado para obtermos a extensão elementar desejada $N \succ M$. □

Dada assinatura (recursiva) L, que tenha símbolos de função, seja L' a assinatura que contenha L e também contenha um símbolo relacional $(n+1)$-ário R_f para cada símbolo de função n-ária $f \in L$. Se A é uma L-estrutura, vamos expandi-la a uma L'-estrutura, interpretando cada símbolo relacional R_f como sendo o gráfico da função $f^A : A^n \to A$. Seja L'' a restrição de L' retirando-se apenas todos os símbolos de função. Com este procedimento, podemos trabalhar com assinaturas que não tenham símbolos de função, mas que estes sejam representados pelos seus gráficos (é apenas um truque sintático que não afeta de modo essencial as estruturas).

Seja T uma L-teoria consistente e suponhamos que $A, B \models T$ e suponhamos que L não tenha símbolos de função. Seja L^A a assinatura obtida de L pela indexação de cada símbolo de constante c com o índice c_A, e de cada símbolo de relação R com R_A e com um novo símbolo de relação unária U_A. Seja L^B obtida pela indexação dos símbolos de L agora por B, com o novo símbolo relacional unário U_B. Definimos o par de modelos $M = (A, B)$ como sendo a $L^A \cup L^B$-estrutura M, cujo domínio seja o conjunto $M = A \cup B$, interpretando $U_A^M = A$, $U_B^M = B$, $c_A^M = c^A \in A \subset M$, $c_B^M = c^B \in B \subset M$, para cada símbolo de constante $c \in L$, e $R_A^M = R^A \subset A^n \subset M^n$ e $R_B^M = R^B \subset B^n \subset M^n$, para cada símbolo relacional n-ário $R \in L$.

Para cada L-fórmula ϕ, definimos indutivamente ϕ_A como sendo:

1. se ϕ for atômica, ϕ_A é obtida de ϕ trocando-se cada ocorrência de símbolo de constante $c \in L$ por $c_A \in L^A$ e de símbolo relacional $R \in L$ por R_A;

2. $(\phi \wedge \psi)_A = \phi_A \wedge \psi_A$; $(\phi \wedge \psi)_A = \phi_A \wedge \psi_A$; $(\phi \vee \psi)_A = \phi_A \vee \psi_A$ e $(\neg\phi)_A = \neg(\phi_A)$;

3. $(\exists x\phi)_A = \exists x(U_A(x) \wedge \phi_A)$ e $(\forall x\phi)_A = \forall x(U_A(x) \rightarrow \phi_A)$.

A mesma definição, *mutatis mutandis*[1], para ϕ_B.

Para a aplicação que temos em mente, precisamos de mais um ingrediente.

Dadas as L-estruturas A e B, um isomorfismo parcial é uma relação $I \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}}[A]^n \times [B]^n$ (sendo que $[A]^0 = [B]^0 = \{\varnothing\}$, e $[A]^n$ é o conjunto de todos os subconjuntos de A contendo exatamente n elementos, e o mesmo para $[B]^n$), tal que:

1. $\varnothing\, I\, \varnothing$;

2. se $\bar{a} \in [A]^n$ e $\bar{b} \in [B]^n$ são tais que $\bar{a}\, I\, \bar{b}$, então as $L(\{c_1, \dots, c_n\})$-estruturas $(A, \bar{a})$ e $(B, \bar{b})$ satisfazem as mesmas $L(\{c_1, \dots, c_n\})$-sentenças atômicas;

3. (homogeneidade) se $\bar{a} \in [A]^n$ e $\bar{b} \in [B]^n$ são tais que $\bar{a}\, I\, \bar{b}$, dado $a_{n+1} \in A$ existe $b_{n+1} \in B$ (e, reciprocamente, dado $b_{n+1} \in B$, existe $a_{n+1} \in A$) tal que $\bar{a} \cup \{a_{n+1}\}\, I\, \bar{b} \cup \{b_{n+1}\}$.

Lema 2.1 Se existir um isomorfismo parcial I entre A e B, então $A \equiv B$.

Demonstração: Provamos a seguinte asserção, por indução na complexidade das L-fórmulas, que implicará na equivalência elementar entre A e B:

> Para todo $n \geq 0$ e todo $\bar{a} = \{a_1, \dots, a_n\} \in [A]^n$ e todo $\bar{b} = \{b_1, \dots, b_n\} \in [B]^n$, se $\{a_1, \dots, a_n\}\, I\, \{b_1, \dots, b_n\}$ e $\phi(x_1, \dots, c_n)$ é L-fórmula e $A \models \phi(\bar{a})$, então $B \models \phi(\bar{b})$.

O passo inicial, das fórmulas atômicas, segue imediatamente da segunda condição da definição do isomorfismo parcial e os conectivos proposicionais não trazem nenhuma dificuldade.

[1]Esnobice latinesca, que significa mudando o que deve ser mudado.

Consideremos uma fórmula $\exists x\phi(x, x_1, \ldots, x_n)$, tal que $A \models \exists x\phi(x, \bar{a})$ e seja $a \in A$, tal que $A \models \phi(a, \bar{a})$ – estamos também supondo, como hipótese de indução, que a afirmação é verdadeira para a fórmula ϕ. Pela terceira condição sobre o isomorfismo parcial, existe $b \in B$, tal que $\{a_1, \ldots, a_n, a\}\, I\, \{b_1, \ldots, b_n, b\}$, o que implica que $B \models \phi(b, \bar{b})$, pela hipótese de indução.

Por fim, consideremos uma fórmula $\forall x\phi(x, x_1, \ldots, x_n)$, tal que $A \models \forall x\phi(x, \bar{a})$ e seja $b \in B$. Pela terceira condição sobre o isomorfismo parcial, existe $a \in A$, tal que $\{a_1, \ldots, a_n, a\}\, I\, \{b_1, \ldots, b_n, b\}$. Como $A \models \forall x\phi(x, \bar{a})$, temos que $A \models \phi(a, \bar{a})$ e, portanto, que $B \models \phi(b, \bar{b})$, por hipótese de indução. Mas isto implica que $B \models \forall x\phi(x, \bar{b})$, dado que o elemento $b \in B$ é arbitrário.

Se L contiver pelo menos um símbolo de constante, então se ϕ for L-sentença atômica (que existe) e $A \models \phi$, então $B \models \phi$ devido às duas primeiras condições sobre o isomorfismo parcial. A conjunção, disjunção, implicação e negação de L-sentenças seguem facilmente por indução e a quantificação também sai por indução e pela terceira condição em I.

Para terminarmos a demonstração, precisamos ainda considerar o caso em que a assinatura L não contenha nenhum símbolo de constante e, portanto não tenha sentenças atômicas – aqui o passo inicial da indução para provarmos que $A \equiv B$ é o das L-sentenças menos complexas, que são do tipo $\exists x\phi(x)$ ou $\forall x\phi(x)$, sendo $\phi(x)$ atômica e contendo apenas uma variável. Mas este caso tem o tratamento igual ao da quantificação que foi feito acima. $\square$

Por fim, a aplicação. Lembramos que uma L-teoria é completa se, para toda sentença ϕ, ou $T \models \phi$ ou $T \models \neg\phi$ (isto é, ϕ ou $\neg\phi$ é conseqüência lógica de T).

Teorema 2.2 Uma L-teoria T é completa se, e somente se, para todo $M = (A, B)$ $L^A \cup L^B$-estrutura recursivamente saturada, se $A, B \models T$ então existe isomorfismo parcial I entre A e B.

Demonstração: $(\Rightarrow)$: Suponhamos que T seja completa e que $M = (A, B)$ $L^A \cup L^B$-estrutura recursivamente saturada, com $A, B \models T$.

Afirmamos que a relação $\bar{a}\, I\, \bar{b}$ se $(A, \bar{a}) \equiv (B, \bar{b})$ é um isomorfismo parcial.

Sendo T completa e $A, B \models T$, então $A \equiv B$, o que implica que $\varnothing\, I\, \varnothing$, ou seja, a primeira condição está garantida.

Se $(A, \bar{a}) \equiv (B, \bar{b})$, certamente essas duas estruturas satisfazem as mesmas $L(\bar{c})$-sentenças – a segunda condição!

Por fim, suponhamos que $\bar{a}\, I\, \bar{b}$ e que $a \in A$. Seja $\Gamma(x)$ o conjunto de todas as fórmulas da forma $U_B(x)$ e $\phi_A(c_a, \bar{c}) \leftrightarrow \phi_B(x, \bar{d})$, sendo $\phi(x, x_1, \ldots, x_n)$ um L-fórmula com as variáveis livres indicadas, e c_a, $\bar{c} = (c_1, \ldots, c_n)$, $\bar{d} = (d_1, \ldots, d_n)$ novas constantes, todas distintas. Certamente tal conjunto é recursivo. Da hipótese de que $\bar{a}\, I\, \bar{b}$, ou seja, de que $(A, \bar{a}) \equiv (B, \bar{b})$, vemos que cada parte finita de Γ é satisfatível em M e, portanto, pela hipótese de que M é recursivamente saturado, Γ é realizado por um elemento $b \in B \subset M$. Isto quer dizer, então, que $(A, \bar{a}, a) \equiv (B, \bar{b}, b)$. Trocando A por B no argumento acima exposto, obtemos o que faltava para concluir aque a terceira condição também está verificada para I.

($\Leftarrow$): Agora suporemos que para todo $M = (A, B)$ $L^A \cup L^B$-estrutura recursivamente saturada, se $A, B \models T$ então existe isomorfismo parcial I entre A e B. Mostraremos que T é completa.

Para isto, basta mostrar que, dados modelos $A_0, B_0 \models T$, temos que $A_0 \equiv B_0$. Consideremos o par $M_0 = (A_0, B_0)$ e uma extensão elementar $M = (A, B)$ que seja recursivamente saturada. Como $M \succ M_0$, devemos ter $A_0 \prec A$ e $B_0 \prec B$, ou seja, $A, B \models T$. pela hipótese, existe isomorfismo parcial entre A e B e, portanto, $A \equiv B$. Isto implica que $A_0 \equiv B_0$, como esperávamos. $\square$

Este é um bom critério para provar que certas teorias T são completas.

Exemplo 2.1 Consideremos o seguinte conjunto de sentenças T, que são satisfeitas na estrutura $\mathcal{Z} = (\mathbb{Z}, 0, 1, +, -, <)$:

1. sentenças dizendo que $(\mathbb{Z}, 0, +, -)$ é um grupo abeliano (a soma é associativa, distributiva, tem elemento neutro 0 e oposto $-$);

2. $<$ é uma ordem linear (estrita) em $\mathbb{Z}$ e 1 é o menor elemento positivo;

3. $\forall x, y, z (x < y \rightarrow x + z < y + z)$ (a ordem é compatível com a operação do grupo)

4. para cada $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$ a sentença $\forall x \bigvee_{0 \leq j < k} (k | x - j)$, sendo que $k | t$ é a fórmula $\exists z (kz = t)$ e kz representa o termo $(z + (z + (... + z) \ldots)$ contendo exatamente k vezes a variável z.

Provemos que tal conjunto T forma uma teoria completa usando o critério acima.

Consideremos $A, B \models T$, tais que $M = (A, B)$ seja recursivamente saturado. Definimos a relação I entre n-uplas de A e de B, como $\bar{a} \, I \, \bar{b}$ se:

1. para cada termo $T(x_1, \ldots, x_n)$, $A \models T(\bar{a}) > 0$ se, e somente se, $B \models T(\bar{b}) > 0$;

2. para cada termo $T(x_1, \ldots, x_n)$ e cada $k \in \mathbb{N}$ $k > 1$, $A \models k | T(\bar{a})$ se, e somente se, $B \models k | T(\bar{b})$.

A condição $\varnothing \, I \, \varnothing$ decorre diretamente do fato de que $A, B \models T$.

As fórmulas atômicas de L são da forma $T_1(\bar{x}) < T_2(\bar{x})$ ou $T_1(\bar{x}) = T_2(\bar{x})$. A primeira é equivalente, em modelos de T, a uma do tipo $T(\bar{x}) > 0$ (ou, mais precisamente, $0 < T(\bar{x})$), e a segunda é equivalente, naqueles modelos, a uma do tipo $T(\bar{x}) = 0$, que é equivalente a $T(\bar{x}) + 1 > 0 \wedge -T(\bar{x}) + 1 > 0$. Usando essas equivalências e a hipótese de que $\bar{a} \, I \, \bar{b}$, concluímos que $(A, \bar{a})$ e $(B, \bar{b})$ satisfazem as mesmas $L(\bar{c})$-sentenças atômicas, ou seja, a segunda condição de um isomorfismo parcial.

Para verificarmos a terceira condição, basta mostrar a seguinte afirmação, decorrente dessas equivalências expostas acima e do Teorema da Compacidade (observando que $\bigwedge_{i=1}^{n} (\phi_i \leftrightarrow \psi_i)$ é logicamente equivalente a $(\bigwedge_i \phi_i \leftrightarrow \bigwedge_i \psi_i)$):

Para todos os termos $T(\bar{x})$ e $S(\bar{x})$ e todos $k, l, m \in \mathbb{N}$, com $k > 1$, se

$$A \models P(\bar{a}) < mc < S(\bar{a}) \text{ e } c \equiv l (\operatorname{mod} k),$$

então existe $x \in B$, tal que

$$B \models P(\bar{b}) < mx < S(\bar{b}) \text{ e } x \equiv l (\operatorname{mod} k).$$

Se existirem apenas uma quantidade finita de elementos de A entre $T(\bar{a})$ e $S(\bar{a})$, então o elemento c é da forma $c = T(\bar{a}) + j$, para algum $j \in \mathbb{N}$ e, portanto x será da mesma forma $x = T(\bar{b}) + j$. Senão, sendo infinita a quantidade, o mesmo ocorrerá em B e podemos escolher $x \equiv l$ (mod k) naquele intervalo, o que sempre existirá. $\square$

3 Modelos κ-saturados, κ-homogêneos, κ-universais

Seja $\kappa \geq \omega$ um cardinal. Dizemos que a estrutura M é κ-saturada se, para todo $A \subset M$, cuja cardinalidade $|A| < \kappa$ e todo $\Gamma \in S_1(A)$ contendo $T(M)$, M realiza o tipo Γ.

Teorema 3.1 Seja $\kappa \geq \omega$ que não seja menor que a cardinalidade do conjunto de L-fórmulas. Então, dada uma L-estrutura A de cardinalidade $|A| \leq 2^\kappa$, existe uma extensão elementar $B \succ A$ κ^+-saturada e de cardinalidade 2^κ.

Demonstração: Construiremos B usando uma união de cadeia elementar. Começando com uma extensão elementar, se for preciso, podemos supor que $|A| = 2^\kappa$. Seja $A_0 = A$ e seja $\mathcal{P}_{\kappa^+}(A_0) = \{X \subset A_0 : |X| \leq \kappa\}$. Então $|\mathcal{P}_{\kappa^+}(A_0)| = \sup_{\eta \leq \kappa} 2^{\kappa \times \eta} = 2^\kappa$ e, portanto, $|\bigcup_{X \in \mathcal{P}_{\kappa^+}(A_0)} S_1(X)| = 2^\kappa$. Assim, podemos obter extensão elementar $A_1 \succ A_0$ que realiza todos os tipos em $\bigcup_{X \in \mathcal{P}_{\kappa^+}(A_0)} S_1(X)$ e de cardinalidade $|A_1| = 2^\kappa$ (usando o método das constantes). Indutivamente construímos cadeia elementar $A_0 \prec A_1 \prec A_2 \prec \ldots$, tal que, para cada $\alpha \geq 0$, $A_{\alpha+1}$ realiza todos os tipos em $\bigcup_{X \in \mathcal{P}_{\kappa^+}(A_\alpha)} S_1(X)$ e tem cardinalidade $|A_{\alpha+1}| = 2^\kappa$, e se $\delta < 2^\kappa$ for ordinal limite, definimos $A_\delta = \bigcup_{\alpha < \delta} A_\alpha$, que também tem cardinalidade $|A_\delta| = 2^\kappa$ e é extensão elementar de seus predecessores.

Seja $B = \bigcup_{\alpha < 2^\kappa} A_\alpha$. Então $B \succ A$, $|B| = 2^\kappa$ e se $X \subset B$ tem cardinalidade $|X| \leq \kappa$ então, como a cofinalidade de 2^κ é estritamente maior do que κ, existe $\alpha < 2^\kappa$, tal que $X \subset A_\alpha$. Daí decorre que $A_{\alpha+1}$ realiza todos os tipos em $S_1(X)$ e, como $B \succ A_\alpha$, B também realiza esses tipos. $\square$

Uma estrutura M é dita κ-homogênea se, para todos $X, Y \subset M$, tais que $|X| = |Y| < \kappa$ e $(M, x_\alpha)_{\alpha < |X|} \equiv (M, y_\alpha)_{\alpha < |Y|}$ (sendo que $X = \{x_\alpha : \alpha < |X|\}$ e $Y = \{y_\alpha : \alpha < |Y| = |X|\}$), então dado $a \in M$ existe $b \in M$, tal que $(M, x_\alpha, a)_{\alpha < |X|} \equiv (M, y_\alpha, b)_{\alpha < |Y|}$.

Teorema 3.2 Seja $\kappa \geq \omega$ que não seja menor que a cardinalidade do conjunto de L-fórmulas, e seja M uma estrutura κ-saturada. Então M é κ-homogênea.

Demonstração: Seja M uma estrutura κ-saturada e $X, Y \subset M$, tais que $|X| = |Y| < \kappa$ e $(M, x_\alpha)_{\alpha<|X|} \equiv (M, y_\alpha)_{\alpha<|Y|}$ (sendo que $X = \{x_\alpha : \alpha < |X|\}$ e $Y = \{y_\alpha : \alpha < |Y| = |X|\}$), e seja $a \in M$. Seja $\Gamma \in S_1(X)$ o tipo do elemento a sobre o conjunto de parâmetros X (ou seja, se $\lambda = |X| < \kappa$ e $C = \{c_\alpha : \alpha < \lambda\}$ é um conjunto de novas constantes, Γ é um conjunto maximal consistente de $L(C)$-fórmulas $\phi(x)$, com variável livre x, ou sem variáveis livres, tal que é realizado pelo elemento $a \in M$ na estrutura $(M, x_\alpha)_{\alpha<\lambda}$). Interpretando cada $c_\alpha \in C$ pelo elemento $y_\alpha \in Y$ e usando a hipótese de que $(M, x_\alpha)_{\alpha<|X|} \equiv (M, y_\alpha)_{\alpha<|Y|}$, obtemos um conjunto Γ finitamente satisfatível na estrutura $(M, y_\alpha)_{\alpha<|Y|}$, ou seja, um tipo em $S_1(Y)$, que é realizado por um elemento $b \in M$, devido à sua κ-saturação. Daí, segue que $(M, x_\alpha, a)_{\alpha<|X|} \equiv (M, y_\alpha, b)_{\alpha<|Y|}$, como queríamos. $\square$

Uma estrutura M é dita κ-universal se para toda estrutura $N \equiv M$ de cardinalidade $|N| < \kappa$, existe $N' \prec M$ isomorfa a N. Isto é, M tem cópia isomorfa de todos os modelos de sua teoria, que sejam de cardinalidade menor do que κ.

Teorema 3.3 Seja $\kappa \geq \omega$ que não seja menor que a cardinalidade do conjunto de L-fórmulas. Se M é uma L-estrutura κ-saturada, então também é κ^+-universal.

Demonstração: Seja M uma estrutura κ-saturada e suponha que $N \equiv M$ tem cardinalidade $|N| \leq \kappa$. Recorrendo a uma extensão elementar de N, se necessário, podemos supor que $|N| = \kappa$ e enumeramos $N = \{a_\alpha : \alpha < \kappa\}$. Vamos obter $N' \prec M$ por indução em $\alpha < \kappa$.

Começando com $\alpha = 0$, seja T a L-teoria de M e $\Gamma \in S_1(T)$ o tipo do elemento $a_0 \in N$ (sem parâmetros). Como $N \equiv M$ e Γ é realizado em N, então Γ é finitamente satisfatível, e portanto realizado por um elemento $b_0 \in M$, devido à κ-saturação de M.

Suponha que já tenhamos definido uma seqüência $\langle b_\alpha : \alpha < \beta \rangle$ de elementos de M, tal que, para cada $\lambda < \beta$, o tipo do elemento b_λ sobre o conjunto de parâmetros $\{b_\alpha : \alpha < \lambda\}$, denotado por $tp(b_\lambda / \{b_\alpha : \alpha < \lambda\})$, conincide com $tp(a_\lambda / \{a_\alpha : \alpha < \lambda\}$ (ambos vistos como um conjunto de $L(\{c_\alpha : \alpha < \lambda\})$-fórmulas tendo no máximo a variável livre x) – observe-se que esta afirmação já foi provada no caso em que $\lambda = 0$. Seja b_β o elemento de M que realiza o tipo $tp(a_\beta / \{a_\alpha : \alpha < \beta\}$ (usando a κ-saturação de M).

Seja $N' \subset M$ o conjunto de todos os b_α, $\alpha < \kappa$, assim obtidos. Então a aplicação $f : a_\alpha \in N \mapsto b_\alpha \in M$ é uma bijeção sobre sua imagem N', que é subestrutura de M, pois toda a informação da estrutura N está contida nos tipos acima considerados. Para provarmos que $N' \prec M$, sejam $\phi(\bar{x})$ uma L-fórmula (com variáveis livres $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$), $\bar{b} \in (N')^n$, e suponhamos que $M \models \phi(\bar{b})$. Renomeando variáveis, se necessário, podemos supor que os elementos da n-upla $\bar{b}$ estejam listados em ordem crescente de índices $\bar{b} = (b_{\alpha_1}, \ldots, b_{\alpha_n})$, com $\alpha_1 < \ldots < \alpha_n$. Então $\phi(c_{\alpha_1}, \ldots, c_{\alpha_{n-1}}, x) \in tp(b_{\alpha_n}/\{b_\eta : \eta < \alpha_n\}) = tp(a_{\alpha_n}/\{a_\eta : \eta < \alpha_n\})$ (como conjunto de $L(\{c_\eta : \eta < \alpha_n\})$-fórmulas). Como o tipo é realizado em N e, portanto em N', $N' \models \phi(\bar{b})$, ou seja, $N' \prec M$, como queríamos. $\square$

Agora provemos a recíproca dos dois teorema anteriores.

Teorema 3.4 Seja $\kappa \geq \omega$ que não seja menor que a cardinalidade do conjunto de L-fórmulas, e seja M uma L-estrutura infinita. São equivalentes as seguintes asserções:

1. M é κ-saturada;
2. M é κ-homogênea e κ^+-universal;
3. M é κ-homogênea e κ-universal.

Demonstração: Já provamos acima que (1) $\Rightarrow$ (2). A implicação (2) $\Rightarrow$ (3) é imediata.

Provemos a implicação (3) $\Rightarrow$ (1). Seja M uma L-estrutura κ-homogênea e κ-universal. Seja $X \subset M$, cuja cardinalidade seja $|X| = \lambda < \kappa$, enumeremos $X = \{a_\eta : \eta < \lambda\}$ e seja $C = \{c_\eta : \eta < \lambda\}$ um conjunto de novos símbolos de constantes. Seja $\Gamma \in S_1(X)$ um tipo sobre o conjunto de parâmetros X (conjunto de $L(C)$-fórmulas), que seja finitamente satisfatível em M. Queremos mostrar que Γ é realizado em M.

Seja $N \equiv M$, tal que $X \subset N$, N realiza o tipo Γ e $|N| = \max\{|X|, |L| + \omega\} < \kappa$, que pode ser obtido pelo método das constantes. Por ser uma estrutura κ-universal e $|N| < \kappa$, existe $N' \prec M$ isomorfa à estrutura N, por um morfismo $f : N \to M$. Seja $Y = \{b_\eta = f(a_\eta) : \eta < \lambda\} \subset M$ a imagem do conjunto X pela aplicação f. Se $p \in N$ realiza o tipo Γ em N, sua imagem $b = f(p)$ realiza-o em N' e, portanto em M. Pela construção de N', obtemos que $(M,a)_{a\in X} \equiv (M,b)_{b\in Y}$. Como M é, por hipótese, κ-homogêneo, existe $q \in M$, tal que $(M,a,q)_{a\in X} \equiv (M,b,p)_{b\in Y}$. Mas isto significa que o elemento q realiza o tipo γ em M, como queríamos. $\square$

4 Exercícios

Exercício 4.1 Mostre que a união e a intersecção de conjuntos recursivos é recursiva.

Exercício 4.2 Ache fórmulas Δ_1^0 específicas para definir as codificações indicadas na introdução.

Obs.: Nos exercícios a seguir, que tratam de estruturas recursivamente saturadas, uma hipótese implícita e sempre presente será a de que L é uma assinatura recursiva sem símbolos de funções.

Exercício 4.3 Mostre que se M é estrutura recursivamente saturada e $|M| = \omega$, então existe um automorfismo (morfismo bijetor) de M distinto da identidade. [Sugestão: tente achar elementos distintos a_0 e b_0 de M, tais que $(M,a_0) \equiv (M,b_0)$.]

Exercício 4.4 Seja $M = (A,B)$ um par recursivamente saturado. Mostre que tanto A como B são também recursivamente saturados.

Exercício 4.5 Suponha que A e B sejam L-estruturas, tais que $B \subseteq A$ e a estruturas expandida (A,P) seja recursivamente saturada, na linguagem expandida com um símbolo relacional unário P, interpretado como sendo o subconjunto B de A. Mostre que o par $M = (A,B)$ é estrutura recursivamente saturada.

Exercício 4.6 Seja $M = (A,B)$ uma estrutura recursivamente saturada, com $|M| = \omega$. Mostre as seguintes equivalências:

1. $T_\exists(A) = T_\exists(B)$ (A e B satisfazem as mesmas sentenças existenciais) se, e somente se, existir inclusao de A em B.

2. $T^+(A) = T^+(B)$ se, e somente se, existir um homomorfismo sobrejetor $f : A \to B$.

Exercício 4.7 Prove que se I é um isomorfismo parcial entre A e B e $(a_1, \ldots, a_n)\, I\, (b_1, \ldots, b_n)$, então existe isomorfismo parcial entre as estruturas expandidas $(A, \bar{a})$ e $(B, \bar{b})$.

Exercício 4.8 Use o método dos modelos recursivamente saturados para obter axiomatizações completas das teorias das seguintes estruturas:

1. $(\omega, <)$;
2. $(\mathbb{Q}, 0, +, \leq)$;
3. $(\mathbb{Q}, <, F)$, sendo que $F : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ é automorfismo de $(\mathbb{Q}, <)$, tal que $\forall x(x < F(x))$.

Exercício 4.9 Mostre que uma estrutura M é κ-saturada para todo cardinal $\kappa \geq \omega$ se, e somente se, M for estrutura finita.

Exercício 4.10 Mostre que se M é κ-homogênea e $|M| = \kappa$, então dados $\lambda < \kappa$ e $X, Y \subset M$, tais que $|X| = |Y| = \lambda$ e $(M, x_\alpha)_{\alpha<\lambda} \equiv (M, y_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ (sendo que x_α e y_α são enumeraçõesde X e Y, respectivamente), então existe um automorfismo $f : M \to M$ (ou seja, L-morfismo bijetor), tal que $f(x_\alpha) = y_\alpha$, para todo $\alpha < \lambda$. [Sugestão: enumere $M = \{a_\alpha : \alpha < \kappa\}$ de modo que estenda a enumeração de X e também como $M = \{b_\alpha : \alpha < \kappa\}$ de modo que estenda a enumeração de Y e defina f indutivamente, partindo da função $f_0 : x_\alpha \in X \mapsto y_\alpha \in Y$.]

Exercício 4.11 Sejam I um conjunto infinito, M_i, $i \in I$, L-estruturas, e U um ultrafiltro ω-incompleto sobre I. Mostre que o ultraproduto $\prod_i M_i/_U$ é uma estrutura ω_1-saturada.

Exercício 4.12 Sejam $M \equiv N$ duas estruturas saturadas e de mesma cardinalidade (são ambas $|M|$-saturadas, $|M| = |N|$). Mostre que M e N são isomorfas.

Exercício 4.13 Neste exercício assumiremos a Hipótese do Contínuo: $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Sejam A e B duas L-estruturas, $|L| \leq \omega$, com cardinalidades $|A|, |B| \leq \aleph_1$. Mostre que são equivalentes:

1. $A \equiv B$;

2. para todos os ultrafiltros não principais U e V sobre ω, são isomorfos os ultraprodutos $\prod A/_U \cong \prod B/_U \cong \prod B/_V$;

3. existem ultrafiltros U e V (sobre algum conjunto de índices I), tais que $\prod A/_U \cong \prod B/_V$.

Exercício 4.14 (Modelos Especiais) Uma estrutura M é dita um modelos especial se existir uma cadeia elementar M_β, tal que $\beta < |M|$ é cardinal e M_β é β^+-saturado. A cadeia de modelos M_β é chamada de cadeia especializadora de M. Mostre que:

1. toda estrutura finita é especial;

2. todo modelo saturado (isto é, M é $|M|$-saturada) é especial;

3. todo modelo de cardinalidade κ^+ é saturado se, e somente se, for especial;

4. todo modelo de cardinalidade κ regular e limite (ou seja, fracamente inacessível) é saturado se, e somente se, for especial.

Índice Remissivo