Gráficos de controle para variáveis

Denise A. Botter

12/08/2013

Após estabilizar o processo, inicia-se a construção dos gráficos de controle.

Variáveis: Gráfico da média $\overline{X}$ e da amplitude R.

1. Gráficos de controle de $\overline{X}$ e R.

Gráfico $\overline{X}$: monitorar a centralidade.

Gráfico R: monitorar a dispersão.

1.1. Gráfico $\overline{X}$

Linha média (LM): localizada na média (valor esperado) de $\overline{X}$

Limites de controle: estabelecidos a 3 desvios padrões da média

$$LSC_{\overline{X}} = \mu_{\overline{X}} + 3\sigma_{\overline{X}}$$

$$LM_{\overline{X}} = \mu_{\overline{X}}$$

$$LIC_{\overline{X}} = \mu_{\overline{X}} - 3\sigma_{\overline{X}}$$

Limites de controle com 3 desvios padrões de afastamento em relação à linha média ("limites três-sigma"): propostos por Shewhart que se baseou no seguinte lema: " se o processo está controlado, evite ajustes desnecessários, que só tendem a aumentar sua variabilidade". Com os limites três-sigma, enquanto o processo estiver controlado, raramente um ponto cairá fora desses limites (indicação de intervenção no processo para ajustes).

Assim, raramente haverá interferência num processo controlado.

Intervenções desnecessárias:
- são perigosas, pois podem desajustar o processo
- geram custos com a interrupção e a investigação de causas especiais inexistentes.

$$\mu_{\overline{X}} = \mu_X = \mu$$

$$\sigma^2_{\overline{X}} = \frac{\sigma^2_X}{n} = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Quando o processo está estável, sob controle, isento de causas denotamos $\mu = \mu_0$ e $\sigma = \sigma_0$. Substituindo μ_0 e σ_0 por suas estimativas (na prática estes parâmetros são desconhecidos), obtemos para o gráfico de $\overline{X}$

$$LSC_{\overline{X}} = \hat{\mu}_0 + 3\frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{n}}$$

$$LM_{\overline{X}} = \hat{\mu}_0$$

$$LIC_{\overline{X}} = \hat{\mu}_0 - 3\frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{n}}$$

Para o processo ajustado e estável em μ_0 e σ_0, o intervalo $\pm$ 3 $\sigma_0/\sqrt{n}$ engloba 99,73% dos valores de $\overline{X}$. Consequentemente, há pouca chance de uma média amostral $\overline{X}$ cair "fora" desse intervalo. Assim, se um valor de $\overline{X}$ cair fora desse intervalo, é provável que μ tenha se alterado, não sendo mais μ_0 por conta de alguma causa especial.

1.2. Gráfico R

Limites três-sigma:

$$LSC_R = \mu_R + 3\sigma_R$$

$$LM_R = \mu_R$$

$$LIC_R = \mu_R - 3\sigma_R$$

Se X~ N(μ, σ^2), então temos os seguintes momentos para a amplitude amostral R:

$$\mu_R = d_2\sigma \text{ e } \sigma_R = d_3\sigma,$$

sendo d_2 e d_3 constantes tabeladas em função de n.

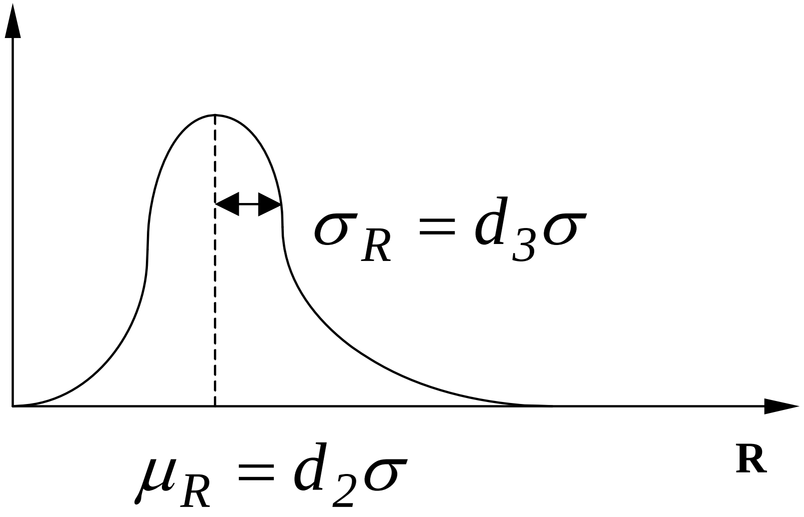

Figura 1: Distribuição da amplitude R

n	2	3	4	5	6	7
d_2	1,128	1,693	2,059	2,326	2,534	2,704
d_3	0,853	0,888	0,880	0,864	0,848	0,833

Para o processo estável temos $\sigma = \sigma_0$. Substituindo σ_0 por sua estimativa $\hat{\sigma}_0$ vem que

$$LSC_R = d_2\,\hat{\sigma}_0 + 3\,d_3\hat{\sigma}_0 = \hat{\sigma}_0\,(d_2 + 3d_3)$$

$$LM_R = d_2\,\hat{\sigma}_0$$

$$LIC_R = \hat{\sigma}_0\,(d_2 - 3d_3)$$

Observação: Se, por acaso, $LIC_R < 0$, adotamos $LIC_R = 0$, ou seja, o LIC_R está ausente.

Para um processo estável, a probabilidade de uma amplitude R cair fora dos limites de controle é muito pequena; quando isto ocorre, questionamos se a variabilidade do processo alterou-se.

Exemplo. Se σ aumenta, E(R) e DP(R) aumentam. Isto implica em valores maiores de R. Se R for maior que o LSC_R, "soará um alarme" de que o desvio padrão σ do processo aumentou.

Observação: Os limites de controle para o gráfico $\overline{X}$ dependem de μ_0 ($\hat{\mu}_0$) e de σ_0 ($\hat{\sigma}_0$). Já, os limites de controle do gráfico R só dependem de σ_0 ($\hat{\sigma}_0$). Assim, iniciamos a construção dos gráficos de controle pelo gráfico R.

1.3. Estimativas

Dado um conjunto de m amostras, cada uma de tamanho n, temos:

$$\hat{\mu}_0 = \overline{\overline{X}} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \overline{X}_i}{m},$$

sendo $\overline{X}_i$ a média amostral da amostra i e $\overline{\overline{X}}$ a média amostral de todas as observações.

Quando utilizamos o gráfico de $\overline{X}$ em conjunto com o gráfico R, temos

$$\hat{\sigma}_0 = S_D = \overline{R}/d_2,$$

sendo $\overline{R}$ a média aritmética dos m valores R_i, ou seja,

$$\overline{R} = \frac{\sum_{i}^{m} R_i}{m}.$$

Quando usamos $\hat{\sigma}_0 = \overline{R}/d_2$, temos

$$LSC_R = d_2 \frac{\overline{R}}{d_2} + 3d_3 \frac{\overline{R}}{d_2} = \overline{R}(1 + \frac{3d_3}{d_2})$$

$$LM_R = d_2 \frac{\overline{R}}{d_2} = \overline{R}$$

$$LIC_R = \overline{R}(1 - \frac{3d_3}{d_2})$$

Exemplo. A tabela que segue apresenta valores de X_{ij}, volume do j-*ésimo* saquinho de leite pertencente à i-*ésima* amostra, e de R_i, amplitude da i-*ésima* amostra, para 25 amostras (subgrupos racionais) de tamanho 5 (m = 25 e n = 5), bem como a amplitude média $\overline{R}$. Com base em $\overline{R}$ temos

$$\hat{\sigma}_0 = S_D = \overline{R} / d_2 = 11{,}0 / 2{,}326 = 4{,}729$$

Observar que $\hat{\sigma}_0$ foi calculado supondo estabilidade do processo.

Tabela 1: Valores de X_{ij} e R_i

	X_{i1}	X_{i2}	X_{i3}	X_{i4}	X_{i5}	R_i
1	1004,6	997,3	1003,0	1005,9	995,8	10,1
2	1001,6	1008,6	997,9	1001,3	999,1	10,7
3	999,1	992,6	1001,1	1001,6	1002,9	10,3
4	1007,9	997,5	991,3	997,8	1000,8	16,5
5	999,5	995,6	1004,3	995,6	991,4	13,0
6	1003,3	996,8	997,2	993,6	1000,1	9,7
7	999,7	1012,1	995,2	1001,8	1002,2	16,9
8	1000,1	995,3	990,0	997,5	1003,2	13,2
9	1004,3	1001,4	1001,6	999,1	996,4	7,9
10	999,0	995,8	989,9	995,1	1002,8	12,9

Tabela 1 (continuação): Valores de X_{ij} e R_i

	X_{i1}	X_{i2}	X_{i3}	X_{i4}	X_{i5}	R_i
11	1003,2	1004,4	993,5	994,6	997,6	10,9
12	996,2	1017,3	993,6	996,5	1003,7	23,7
13	1014,0	1008,9	1004,1	1007,9	1000,7	13,3
14	1002,2	996,6	1002,7	1004,2	1001,8	7,6
15	998,3	997,5	1006,1	996,5	998,1	9,6
16	995,8	1000,8	999,1	1002,5	1001,0	6,7
17	1004,1	1003,0	1004,8	997,9	999,9	6,9
18	1000,1	994,9	1000,1	1004,9	997,3	10,0
19	1000,2	996,1	998,0	1006,1	999,4	10,0
20	1002,3	999,0	1000,8	1000,7	998,0	4,3

Tabela 1 (continuação): Valores de X_{ij} e R_i

	X_{i1}	X_{i2}	X_{i3}	X_{i4}	X_{i5}	R_i
21	998,3	998,1	1004,2	1002,1	991,3	12,9
22	997,1	1000,7	999,8	1000,6	1001,7	4,6
23	1003,6	996,1	1001,4	998,0	991,8	11,9
24	999,9	1006,4	1005,1	999,8	1003,0	6,6
25	1007,3	999,8	992,5	996,2	998,2	14,8
					Média R_i	11,0

$$LSC_R = (d_2 + 3d_3)\hat{\sigma}_0 = 23{,}26$$

$$LM_R = \overline{R} = 11{,}0$$

$$LIC_R = (d_2 - 3d_3)\hat{\sigma}_0 = -1{,}26 \Rightarrow LIC_R = 0{,}00$$

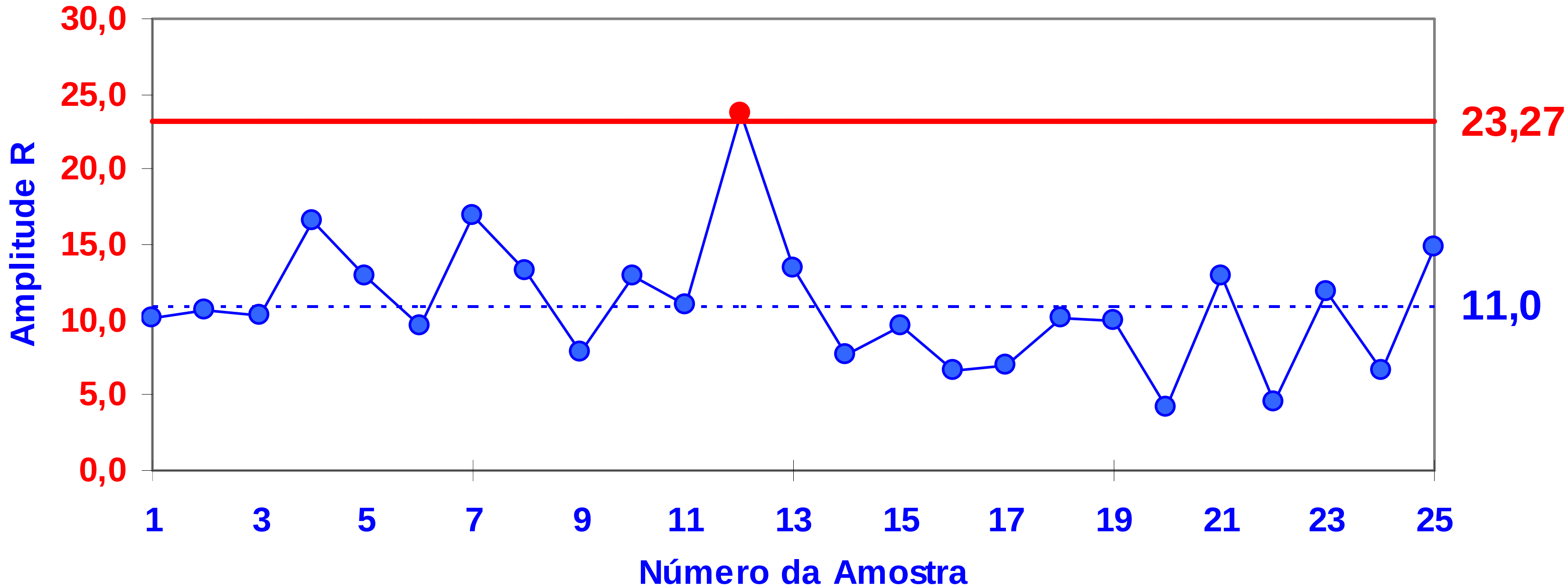

Figura 2: Gráfico da Amplitude R

A amplitude da 12ª amostra é muito grande (R_{12} acima de LSC_R). É necessário encontrar um motivo para este fato.

- Causa especial diagnosticada. Só afetou a 12ª amostra: eliminar essa amostra da análise. Se mais amostras forem afetadas, eliminá-las também, mesmo que estejam dentro dos limites de controle. Se essas amostras eliminadas forem muitas e restarem poucas para estimar σ_0, deve-se prolongar o período de coleta de amostras e coletar mais dados.

- Em geral, na prática, não é sempre possível diagnosticar a causa especial nem saber quais amostras foram afetadas. Assim, se em 25 ou 30 amostras, apenas um R_i estiver fora dos limites de controle e não conseguirmos detectar a causa especial que aumentou a variabilidade, podemos ou não eliminar esse R_i. Isso não afetará muito os limites de controle calculados. Se mais de um R_i cair fora dos limites de controle, volta-se à etapa inicial e tenta-se descobrir as causas especiais que estão afetando o processo (ver fluxograma).

Vamos supor que a causa especial foi diagnosticada e confirmou-se que a mesma afetou apenas o 12º subgrupo racional.

Eliminamos a 12ª amostra e recalculamos $\bar{R}$. Em seguida, refazemos o gráfico R sem a amostra 12. Notamos que a distribuição dos pontos em torno da LM é aleatória. Nenhum ponto excede o LSC_R.

Uma vez construído o gráfico R, vamos construir o gráfico da média.

$$LSC_R = (d_2 + 3d_3)\hat{\sigma}_0 = 22{,}20$$

$$\hat{\sigma}_0 = 4{,}514$$

$$LM_R = \overline{R} = 10{,}5$$

$$LIC_R = (d_2 - 3d_3)\hat{\sigma}_0 = -1{,}20 \Rightarrow LIC_R = 0{,}00$$

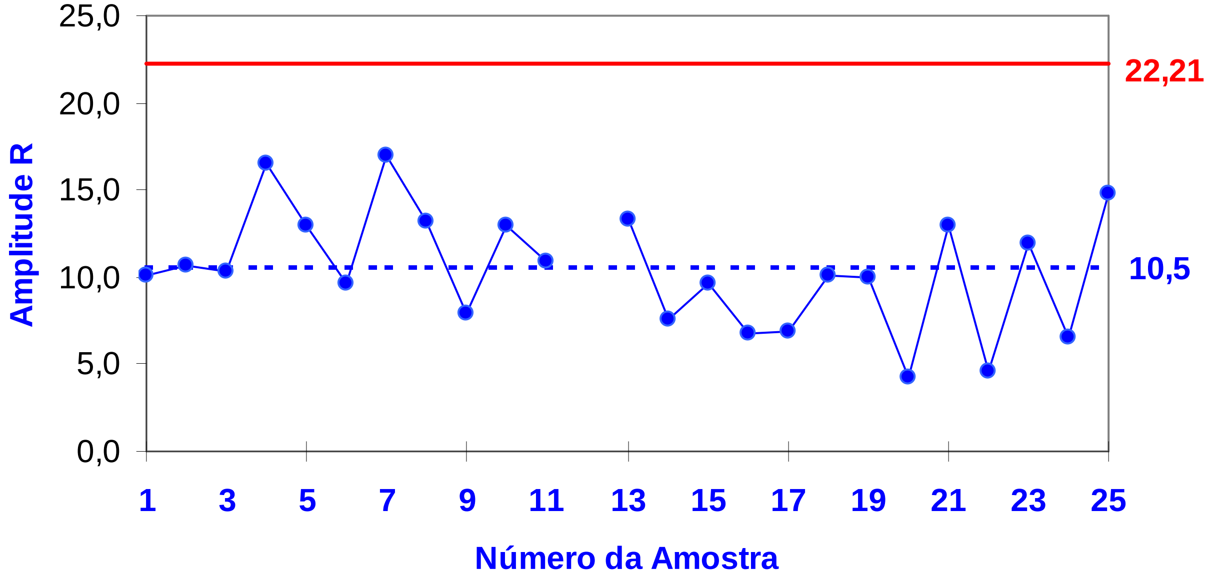

Figura 3: Gráfico da Amplitude R (sem a 12ª amostra)

Vamos considerar para a construção do gráfico da média, os valores de X_{ij} e de $\overline{X}_i$ dos 24 subgrupos racionais de tamanho 5 (m = 24 e n = 5) e a média geral $\overline{\overline{X}}$. Observar que a 12ª amostra foi eliminada.

$$LSC_{\overline{X}} = \mu_{\overline{X}} + 3\sigma_{\overline{X}} \qquad (3.1)$$

$$LM_{\overline{X}} = \mu_{\overline{X}} \qquad (3.2)$$

$$LIC_{\overline{X}} = \mu_{\overline{X}} - 3\sigma_{\overline{X}} \qquad (3.3)$$

$$\boxed{\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}}$$

$$LSC_{\overline{X}} = \hat{\mu}_0 + 3\frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{n}} \qquad (3.6)$$

$$\boxed{\overline{\overline{X}} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \overline{X}_i}{m}}$$

$$LM_{\overline{X}} = \hat{\mu}_0 \qquad (3.7)$$

$$\boxed{S_D = \overline{R} / d_2}$$

$$LIC_{\overline{X}} = \hat{\mu}_0 - 3\frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{n}} \qquad (3.8)$$

$$LSC_{\overline{X}} = \hat{\mu}_0 + 3\frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{n}} = 1000{,}0 + 3\frac{4{,}514}{\sqrt{5}} = 1006{,}1 \qquad (3{,}28)$$

$$LM_{\overline{X}} = \hat{\mu}_0 = 1000{,}0 \qquad (3.29)$$

$$LIC_{\overline{X}} = \hat{\mu}_0 - 3\frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{n}} = 1000{,}0 - 3\frac{4{,}514}{\sqrt{5}} = 993{,}9 \qquad (3.30)$$

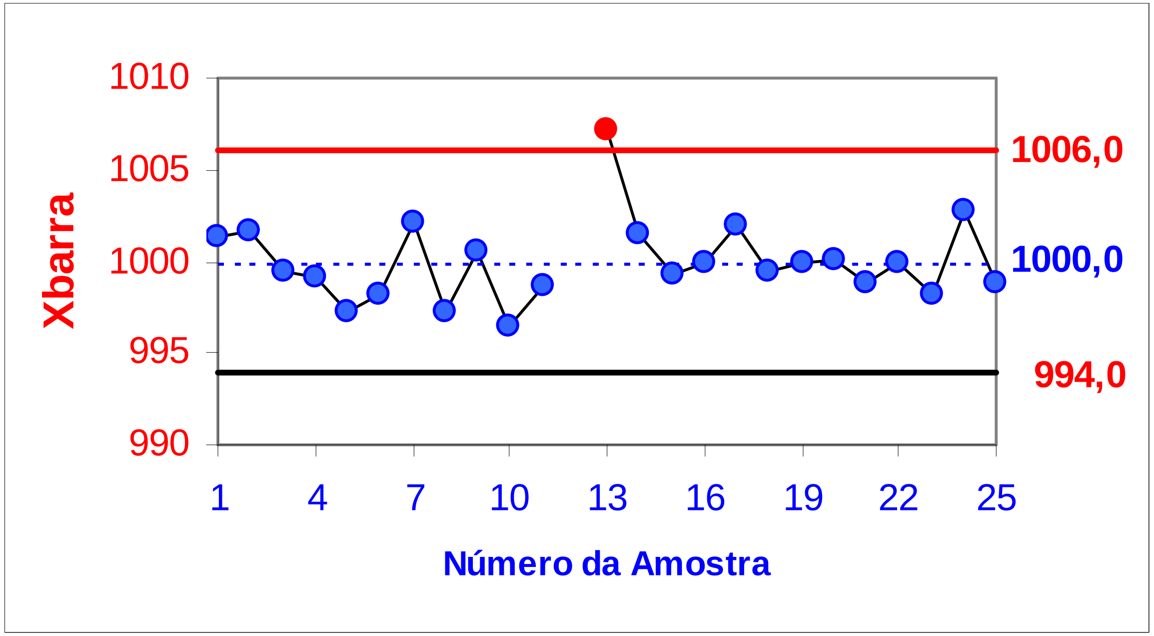

Figura 4: Gráfico da Média $\overline{X}$ (sem a 12ª amostra)

No gráfico de $\overline{X}$ vemos que a média da 13ª amostra excede o LSC. Repetir então o fluxograma. Vamos excluir a 13ª amostra. Observar que quando excluímos essa amostra, não recalculamos $\overline{R}$ pois o processo estava estável quanto à dispersão com a 13ª amostra incluída. Refazemos o gráfico de $\overline{X}$. Percebe-se que os pontos distribuem-se aleatoriamente em torno da LM e nenhum deles excede o LSC ou é inferior ao LIC.

$$LSC_{\overline{X}} = \hat{\mu}_0 + 3\frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{n}} = 1000{,}0 + 3\frac{4{,}514}{\sqrt{5}} = 1005{,}8 \qquad (3{,}31)$$

$$LM_{\overline{X}} = \hat{\mu}_0 = 999{,}7 \qquad (3.32)$$

$$LIC_{\overline{X}} = \hat{\mu}_0 - 3\frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{n}} = 1000{,}0 - 3\frac{4{,}514}{\sqrt{5}} = 993{,}6 \qquad (3.33)$$

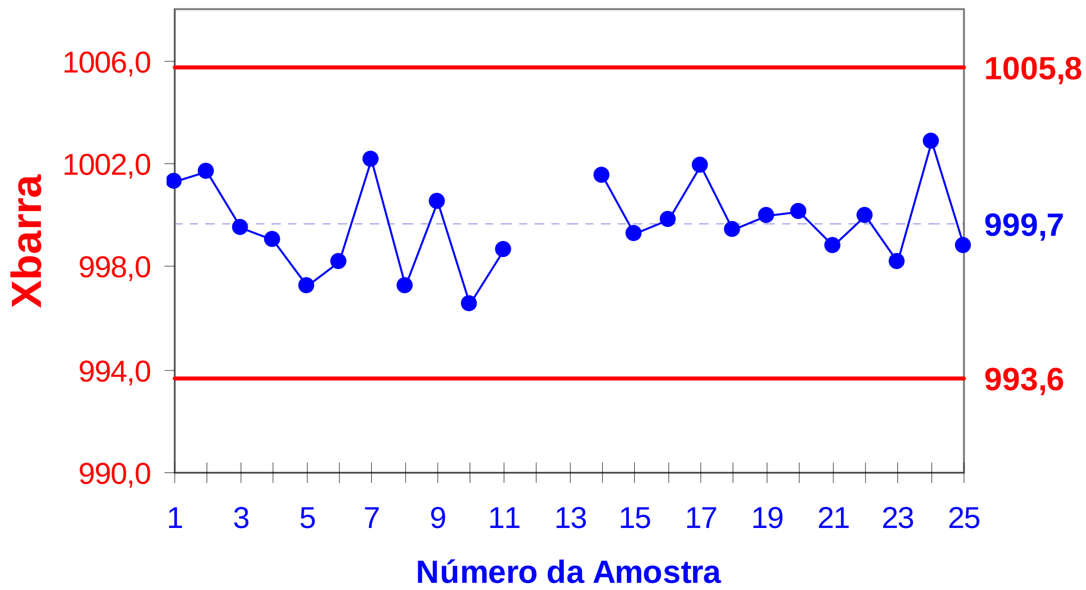

Figura 5: Gráfico da Média $\overline{X}$ (sem a 12ª e 13ª amostras)

Com o processo estável e os gráficos construídos, passamos a monitorar o processo. A cada meia hora de produção, retiram-se 5 saquinhos de leite. Calculados $\overline{X}$ e R, estes são plotados nos gráficos de controle. Os limites desses gráficos não são mais alterados, a não ser que haja mudanças no processo (mudanças físicas, por exemplo). Se novos valores de $\overline{X}$ e de R saírem fora dos limites de controle, paramos o processo e procuramos a causa especial tentando eliminá-la.

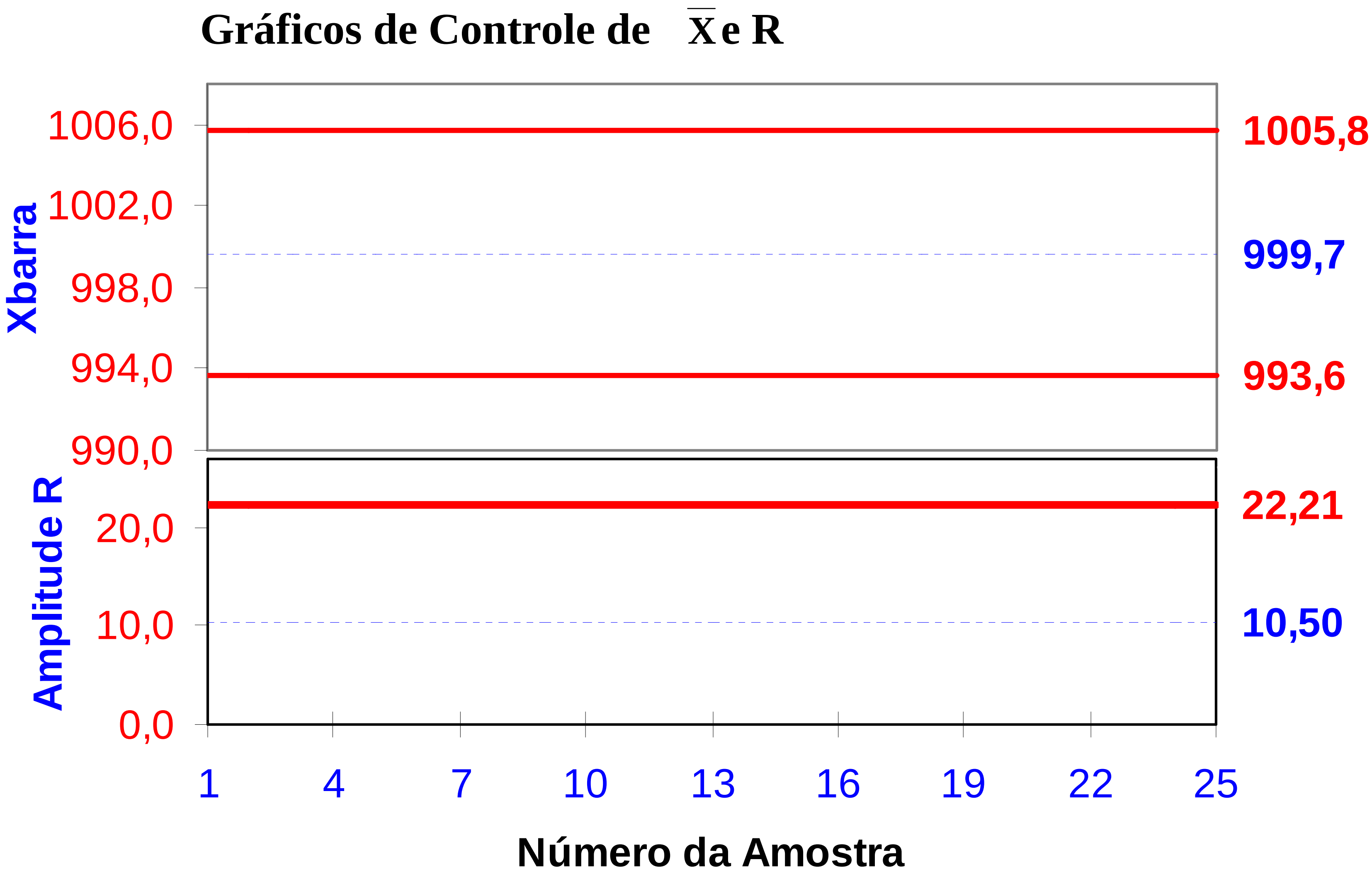

Figura 6: Gráficos da Média $\overline{X}$ e da Amplitude R