MAE0532

CONTROLE ESTATÍSTICO DE QUALIDADE

15/08/13

Análise de desempenho dos gráficos $\bar{X}$ e R

Vamos estudar a capacidade desses gráficos detectarem perturbações no processo.

Abordaremos o plano de amostragem (determinação de n, do intervalo h entre amostras) e o estabelecimento dos limites de controle (3 desvios padrões ou outra distância?).

Desenvolvimento

- Eficiência isolada do gráfico de $\bar{X}$

- Eficiência isolada do gráfico R

- Eficiência conjunta dos gráficos de $\bar{X}$ e R
- Eficiência do gráfico de $\bar{X}$ quando regras suplementares de decisão são consideradas.

Gráfico de $\bar{X}$

Vamos examinar o seguinte teste de hipóteses:

H_0: **Réu inocente** *versus* H_1: **Réu culpado**

Erro tipo I: rejeitar H_0 quando H_0 é verdadeira (**condenar um inocente**).
Temos que a $P(\text{erro tipo I}) = \alpha$.
Além disso, $1 - \alpha = P(\text{não rejeitar } H_0 \text{ quando } H_0 \text{ é verdadeira})$.

Erro tipo II: não rejeitar H_0 quando H_0 é falsa (**inocentar um criminoso**).
Temos que a $P(\text{erro tipo II}) = \beta$ e que
$1 - \beta = \text{poder} = P(\text{rejeitar } H_0 \text{ quando } H_0 \text{ é falsa})$.

Gráfico de $\bar{X}$: amostras de tamanho n são retiradas a cada 15 minutos ou meia hora. A média amostral $\bar{X}$ é calculada para cada amostra e plotada no gráfico de controle.

Este procedimento equivale a uma sequência de testes de hipóteses em que, a cada 15 ou 30 minutos, testamos sempre as mesmas hipóteses:

H_0: **processo em controle** *versus* H_1: **processo fora de controle**

ou

H_0: **processo ajustado** *versus* H_1: **processo desajustado**

ou

H_0: **processo centrado no valor-alvo** *versus* H_1: **processo não centrado no valor-alvo**

ou

H_0: **processo livre de causas especiais** *versus* H_1: **processo sob causas especiais**

ou

$$H_0 : \mu = \mu_0 \text{ versus } H_1 : \mu \neq \mu_0,$$

sendo μ_0 o valor-alvo ou o valor médio da variável aleatória X (no exemplo, X é o volume de um saquindo de leite, ou seja, $\mu_0 = 1000$ml).

Observação: Lembrar que μ_0 é o valor especificado para μ (média de X) ou é a média amostral sob o processo controlado.

Quando $\bar{X}$ cai dentro dos limites de controle, temos que H_0 é aceita (regra de decisão).

Se H_0 é verdadeira (processo controlado), α é o risco de **erroneamente** considerarmos o processo fora de controle (**alarme falso**).

Se H_1 é verdadeira (processo fora de controle), β é o risco de **erroneamente** considerarmos o processo controlado (**não-detecção**).

Consequências práticas:
- Erro tipo I: intervir no processo quando o mesmo está isento de causas especiais; desajustar um processo ajustado; custos.
- Erro tipo de II: não intervir no processo na hora certa quando o mesmo está sob a influência de causas especiais.

Temos formalmente:

$$\alpha = P[\bar{X} > LSC_{\bar{X}} \text{ ou } \bar{X} < LIC_{\bar{X}} | \mu = \mu_0]$$

e

$$\beta = P[LIC_{\bar{X}} \leq \bar{X} \leq LSC_{\bar{X}} | \mu \neq \mu_0].$$

Suposição: variabilidade controlada.

Alarme falso no gráfico de $\bar{X}$

Supondo que $\bar{X}$ tenha distribuição aproximadamente normal, temos que

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}} \sim N(0, 1).$$

Processo controlado em $\mu - \mu_0$ e $\sigma = \sigma_0$, implica em

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \sim N(0,1).$$

Temos, então,

$$\begin{aligned}\alpha &= P[\bar{X} > LSC_{\bar{X}}|\mu = \mu_0] + P[\bar{X} < LIC_{\bar{X}}|\mu = \mu_0] \\ &= P\left[Z > \frac{LSC_{\bar{X}} - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right] + P\left[Z < \frac{LIC_{\bar{X}} - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right]\end{aligned}$$

Lembrando que $LSC_{\bar{X}} = \mu_0 + 3\sigma_0/\sqrt{n}$ e $LIC_{\bar{X}} = \mu_0 - 3\sigma_0/\sqrt{n}$, temos

$$\alpha = P[Z > 3] + P[Z < -3] = 2P[Z > 3] = 0,0027,$$

independentemente dos valores de μ_0 e σ_0.

Sabemos que α é a probabilidade de cada amostra gerar um alarme falso. Seja L o número de amostras que antecedem um alarme falso (incluindo a que gera o alarme falso). Temos

$$P[L = d] = \alpha(1-\alpha)^{d-1}, \quad d = 1, 2, 3, \ldots,$$

ou seja, $L \sim$ Geométrica (α). Assim,

$$E(L) = \frac{1}{\alpha},$$

número médio de amostras até um alarme falso (NMAF). Para limites 3-sigma, teremos em média 1 alarme falso a cada 1/0,0027 = 370,4 amostras (pontos plotados). Se o usuário considerar o valor de NMAF pequeno pode, como alternativa, alargar os limites de controle, considerando $LSC_{\bar{X}} = \mu_0 + k\sigma_0/\sqrt{n}$ e $LIC_{\bar{X}} = \mu_0 - k\sigma_0/\sqrt{n}$. Para $k = 3,10$, temos $\alpha = 0,0019$ e NMAF = 1/0,0019 = 516,7 amostras.

Seja h, o intervalo de tempo entre retiradas de amostras. O tempo médio entre alarmes falsos é dado por

$$\frac{1}{\alpha}h.$$

Exemplo. $h = 15$ minutos e $k = 3,1$. Temos que são necessárias

$$\frac{1}{0,0019} \times \frac{1}{4} \text{ hora} = 129 \text{ horas de produção}$$

para a ocorrência de um alarme falso.

Generalizando,

$$\alpha = P[|Z| > k], \text{ para qualquer } n,$$

ou seja, α só depende de k (não depende de n). Ver Figuras 1 e 2.

Poder do gráfico de $\bar{X}$

Se H_1 é verdadeira, gostaríamos que o primeiro ponto plotado já caísse fora dos limites de controle, sinalizando o processo desajustado. Isso no entanto não ocorre se o deslocamento da média μ for pequeno em relação a μ_0.

Escrevendo

$$\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma_0 \quad \text{(desvio para mais)}$$

temos

$$\delta = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma_0} \quad \text{(escrito em função de } \sigma_0\text{).}$$

Se $\delta \geq 1,5$, rapidamente $\bar{X}$ cairá fora dos limites de controle. Se $\delta < 1,5$, existirá certa inércia. Na Figura 3, o sinal ocorre quando o quinto ponto é plotado. Nessa figura, $\mu_{\bar{X}} = \mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma_0$.

A Figura 4 ilustra o cálculo de Pd, poder do gráfico de controle de $\bar{X}$.

$$
\begin{aligned}
Pd &= P[\bar{X} < LIC_{\bar{X}} | \mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma_0] + P[\bar{X} > LSC_{\bar{X}} | \mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma_0] \\
&= P[\bar{X} < \mu_0 - k\sigma_0/\sqrt{n} | \mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma_0] \\
&+ P[\bar{X} > \mu_0 + k\sigma_0/\sqrt{n} | \mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma_0] \\
&= P[Z < \frac{\mu_0 - k\sigma_0/\sqrt{n} - \mu_0 - \delta\sigma_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}] \\
&+ P[Z > \frac{\mu_0 + k\sigma_0/\sqrt{n} - \mu_0 - \delta\sigma_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}] \\
&= P[Z < -k - \delta\sqrt{n}] + P[Z > k - \delta\sqrt{n}]
\end{aligned}
$$

Exemplo: $k = 3$, $\delta = 1$ e $n = 4$. Denotando por $Z_{LIC} = -k - \delta\sqrt{n}$ e por $Z_{LSC} = k - \delta\sqrt{n}$, temos $Z_{LIC} = -5$ e $Z_{LSC} = 1$. Assim,

$$Pd = P[Z < -5] + P[Z > 1] = 0,1587.$$

Seja M o número de amostras que antecede um alarme verdadeiro (incluindo a amostra que gerou $\bar{X}$ fora dos limites de controle). Temos

$$P[M = m] = Pd(1 - Pd)^{m-1}, \quad m = 1, 2, 3, \ldots,$$

ou seja, $M \sim$ Geométrica (Pd). Assim,

$$E(M) = \frac{1}{Pd},$$

é o número médio de amostras até um alarme verdadeiro (NMA). Na Figura 3 temos $M = 5$. Para o exemplo, são necessárias em média

$$\frac{1}{0,1587} = 6,3$$

amostras de tamanho 4 para detectar um deslocamento da média da ordem de 1 desvio padrão. Se n cresce, M diminui.

Exemplo: $n = 9$, $\delta = 1$ e $k = 3$. Temos $Z_{LIC} = -k - \delta\sqrt{n} = -6$, $Z_{LSC} = k - \delta\sqrt{n} = 0$ e

$$Pd = P[Z < -6] + P[Z > 0] = 0,5.$$

Logo, $E(M) = NMA = 1/0,5 = 2$, ou seja, são necessárias, em média, 2 amostras de tamanho 9 para detectar o mesmo deslocamento da média. Como h é constante, quando n aumenta, o tempo médio até a detecção de um alarme verdadeiro diminui.

Quando uma causa especial ocorre, o processo fica descontrolado até a detecção quando haverá interferência e reajuste. Assim, se n aumenta, aumenta o custo de inspeção, mas o tempo médio de detecção e os custos de produção sob um processo descontrolado são reduzidos. A Tabela 2 mostra valores de Pd para diferentes combinações de δ e n. A Figura 5 apresenta curvas de Pd versus δ para $n = 2, 3, 4, 5, 9$ e 16.

Medindo a rapidez de detecção de descontroles

Medida de eficiência mais usual dos gráficos de controle: **NMA**

Exemplo. A Figura 6 mostra curvas de NMA versus δ. Em média são necessárias 10 amostras de tamanho 3 ou 2 de tamanho 9 para o gráfico sinalizar um deslocamento $\delta = 1$.

As Figuras 7 e 8 mostram curvas da probabilidade de não-detecção (probabilidade de todos os i primeiros valores de $\bar{X}$ caírem dentro dos limites de controle após o desajuste.

Na Figura 7 temos $n = 4$, $\delta = 1$ e $\delta = 1,5$.
- $\delta = 1,5$ será detectado com certeza até a sétima amostra.
- $\delta = 1$ tem aproximadamente 30% de probabilidade de passar despercebido após a retirada e análise da sétima amostra.

Seja M o número da amostra que sinaliza o desajuste. Para $n = 4$ e $\delta = 1$, temos $Pd = 0,159$. Logo, $P[M = 1] = Pd = 0,159$ e $P[M > 7] = 0,3$. A Figura 7 mostra que os gráficos de $\bar{X}$ são ágeis na detecção de grandes deslocamentos da média ($\delta = 1,5$), porém são lentos no caso de deslocamentos moderados ($\delta = 1$).

Na Figura 8 temos $\delta = 1$, $n = 4$ e $n = 9$. Amostras grandes implicam em gráficos de controle de $\bar{X}$ mais ágeis na detecção de deslocamentos moderados da média, porém mais lentos no caso de amostras pequenas.