MAE0532

CONTROLE ESTATÍSTICO DE QUALIDADE

22/08/13

Análise de desempenho dos gráficos $\bar{X}$ e R

Vamos estudar a capacidade desses gráficos detectarem perturbações no processo.

Abordaremos o plano de amostragem (determinação de n, do intervalo h entre amostras) e o estabelecimento dos limites de controle (3 desvios padrões ou outra distância?).

Desenvolvimento

- Eficiência isolada do gráfico de $\bar{X}$
- Eficiência isolada do gráfico R

- Eficiência conjunta dos gráficos de $\bar{X}$ e R

- Eficiência do gráfico de $\bar{X}$ quando regras suplementares de decisão são consideradas.

Gráficos $\bar{X}$ e R: análise do desempenho conjunto

$$H_0\text{: } \mu = \mu_0 \text{ e } \sigma = \sigma_0 \textit{ versus } H_1\text{: } \mu \neq \mu_0 \text{ e/ou } \sigma \neq \sigma_0,$$

sendo μ_0 e σ_0, a média e o desvio padrão do processo quando isento de causas especiais que afetam a média e/ou a variabilidade da variável X de interesse.

Probabilidade conjunta de ocorrer um Alarme Falso

Se H_0 é verdadeira, α é a probabilidade de $\bar{X}$ cair fora dos limites de controle do gráfico de $\bar{X}$ e/ou R cair fora dos limites de controle do gráfico R, dado que $\mu = \mu_0$ e $\sigma = \sigma_0$ (sinal indevido de um estado fora de controle).

Sejam $\alpha_{\bar{X}}$, o risco de Alarme Falso no gráfico de $\bar{X}$ e α_R, o risco de Alarme Falso no gráfico R. Temos

$$\begin{aligned}
\alpha &= P[\bar{X} \text{ cair fora dos limites de controle do gráfico de } \bar{X}] \\
&+ P[R \text{ cair fora dos limites de controle do gráfico } R] \\
&- P[\bar{X} \text{ cair fora dos limites de controle do gráfico de } \bar{X} \text{ e} \\
&\quad R \text{ cair fora dos limites de controle do gráfico } R] \\
&= \alpha_{\bar{X}} + \alpha_R - \alpha_{\bar{X}} . \alpha_R,
\end{aligned}$$

lembrando que $\bar{X}$ e R são independentes.

Fixando $n = 4$, para limites 3-sigma, temos $\alpha_{\bar{X}} = 0,0027$ e $\alpha_R = 0,0050$. Logo, $\alpha = 0,0077$ e $NMAF = 1/0,0077 = 130$ (incidência alta de Alarmes Falsos).

Como aumentar $NMAF$?

Para n fixo, basta reduzir α alargando os limites de controle. Isso é razoável se não temos outra indicação qualquer.

Vamos supor, para n fixo que $\alpha_{\bar{X}} = \alpha_R = 0,0012$.

Nesse caso, $\alpha = 0,0024$ aproximadamente e $NMAF = 1/0,0024 = 416,7$ amostras. Agora, os limites de controle não são mais 3-sigma, mas k-sigma.

Para o gráfico de $\bar{X}$ teremos

$$\begin{aligned} LSC_{\bar{X}} &= \mu_0 + k\sigma_0/\sqrt{n} \\ LIC_{\bar{X}} &= \mu_0 - k\sigma_0/\sqrt{n} \end{aligned}$$

Como

$$\alpha_{\bar{X}} = P[|Z| > k],$$

temos

$$0,0012 = P[|Z| > k].$$

Como $Z \sim N(0,1)$, vem que $k = 3,24$ e

$$\begin{aligned} LSC_{\bar{X}} &= \mu_0 + 3,24\sigma_0/\sqrt{n} \\ LIC_{\bar{X}} &= \mu_0 - 3,24k\sigma_0/\sqrt{n} \end{aligned}$$

Para o gráfico de R teremos

$$\begin{aligned} LSC_R &= W_{1-\alpha/2}\sigma_0 \\ LIC_R &= W_{\alpha/2}\sigma_0 \end{aligned}$$

Como $\alpha = 0,0012$ e $\alpha/2 = 0,0006$, obtemos (por interpolação na Tabela da distribuição acumulada de W) que $W_{0,0006} = 0,167$, fixado, por exemplo $n = 4$. Já $W_{1-0,0006} = W_{0,9994} = 5,50$. Logo,

$$\begin{aligned} LSC_R &= 5,50\sigma_0 \\ LIC_R &= 0,167\sigma_0 \end{aligned}$$

Poder conjunto dos gráficos de $\bar{X}$ e R

Sejam $Pd_{\bar{X}}$, o poder do gráfico de $\bar{X}$ e Pd_R, o poder do gráfico R, sinalizando a mudança de μ_0 para $\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma_0$ e de σ_0 para $\sigma_1 = \lambda\sigma_0$, respectivamente. Seja Pd, o poder conjunto dos dois gráficos. Temos

$$Pd = Pd_{\bar{X}} + Pd_R - Pd_{\bar{X}}.Pd_R.$$

Para limites de controle determinados com base em $\alpha_{\bar{X}}$, α_R e $LIC_R = 0$, temos:

$$\begin{aligned} Pd_R &= P[R > LSC_R | \sigma = \sigma_1 \text{ e } n = n_0] \\ &= P[R > W_{1-\alpha_R}\sigma_0 | \sigma = \sigma_1 \text{ e } n = n_0] \\ &= P[W > W_{1-\alpha_R}/\lambda | n = n_0] \end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
Pd_{\bar{X}} &= P[\bar{X} < LIC_{\bar{X}} | \mu = \mu_1 \text{ e } \sigma = \sigma_1] \\
&+ P[\bar{X} > LSC_{\bar{X}} | \mu = \mu_1 \text{ e } \sigma = \sigma_1] \\
&= P[\bar{X} < \mu_0 - k\sigma_0/\sqrt{n} | \mu = \mu_1 \text{ e } \sigma = \sigma_1] \\
&+ P[\bar{X} > \mu_0 + k\sigma_0/\sqrt{n} | \mu = \mu_1 \text{ e } \sigma = \sigma_1] \\
&= P\left[Z < \frac{\mu_0 - k\sigma_0/\sqrt{n} - \mu_1}{\sigma_1/\sqrt{n}}\right] \\
&+ P\left[Z > \frac{\mu_0 + k\sigma_0/\sqrt{n} - \mu_1}{\sigma_1/\sqrt{n}}\right] \\
&= P\left[Z < \frac{\mu_0 - k\sigma_0/\sqrt{n} - \mu_0 - \delta\sigma_0}{\sigma_1/\sqrt{n}}\right] \\
&+ P\left[Z > \frac{\mu_0 + k\sigma_0/\sqrt{n} - \mu_0 - \delta\sigma_0}{\sigma_1/\sqrt{n}}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= P\left[Z < \frac{-(k+\delta\sqrt{n})\sigma_0}{\sigma_1}\right] + P\left[Z > \frac{(k-\delta\sqrt{n})\sigma_0}{\sigma_1}\right] \\
&= P\left[Z < \frac{-(k+\delta\sqrt{n})}{\lambda}\right] + P\left[Z > \frac{k-\delta\sqrt{n}}{\lambda}\right],
\end{aligned}
$$

sendo $\lambda = \sigma_1/\sigma_0$ e $Z \sim N(0,1)$.

Exemplo A. Sejam $\mu_1 = \mu_0 + 0,5\sigma_0$, $\sigma_1 = 2\sigma_0$. Adotando $n = 4$ e $\alpha_{\bar{X}} = \alpha_R = 0,0012$, obtemos $LSC_R = 5,25\sigma_0$ e $k = 3,24$. Assim,

$$
\begin{aligned}
Pd_{\bar{X}} &= P\left[Z < \frac{-(k+\delta\sqrt{n})}{\lambda}\right] + P\left[Z > \frac{k-\delta\sqrt{n}}{\lambda}\right] \\
&= P[Z < -(3,24+0,5\sqrt{4})/2] + P[Z > (3,24-0,5\sqrt{4})/2] \\
&= P[Z < -2,12] + P[Z > 1,12] \\
&= 0,1484,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Pd_R &= P[W > W_{1-\alpha_R}/\lambda | n = 4] \\
&= P[W > 5,25/2] \\
&= 1 - P[W \leq 2,625] \\
&= 1 - 0,75 \\
&= 0,25
\end{aligned}
$$

e

$$
Pd = 0,1484 + 0,25 - 0,1484.0,25 = 0,3613.
$$

Observações

1. Se $\lambda = 1$ (a variabilidade não se alterou),

$$\begin{aligned} Pd_{\bar{X}} &= P\left[Z < \frac{-(k+\delta\sqrt{n})}{\lambda}\right] + P\left[Z > \frac{k-\delta\sqrt{n}}{\lambda}\right] \\ &= P[Z < -(3,24 + 0,5\sqrt{4})] + P[Z > 3,24 - 0,5\sqrt{4}] \\ &= P[Z < -4,24] + P[Z > 2,24] \\ &= 0,01255 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} Pd &= Pd_{\bar{X}} + \alpha_R - Pd_{\bar{X}}.\alpha_R \\ &= 0,01255 + 0,0012 - 0,01255.0,0012 = 0,01374. \end{aligned}$$

2. Se $\delta = 0$ (a média não se alterou),

$$\begin{aligned} Pd_{\bar{X}} &= P\left[Z < \frac{-(k+\delta\sqrt{n})}{\lambda}\right] + P\left[Z > \frac{k-\delta\sqrt{n}}{\lambda}\right] \\ &= P[Z < -3,24/2] + P[Z > 3,24/2] \\ &= 2P[Z < -1,62] \\ &= 0,1052 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} Pd &= Pd_{\bar{X}} + Pd_R - Pd_{\bar{X}}.Pd_R \\ &= 0,1052 + 0,25 - 0,1052.0,25 = 0,3289. \end{aligned}$$

No caso **1.**, Pd reduz muito. Sem o gráfico R, $Pd = Pd_{\bar{X}}$ quase não se altera, passando de 1,4% para 1,3%.

No caso **2.** Pd não sofre muita alteração. Sem o gráfico $\bar{X}$, passa de 33% para 25%. Isso ocorre porque um aumento na dispersão aumenta a probabilidade de $\bar{X}$ cair na região de aceitação do gráfico da média.

Exemplo B. Sejam $\mu_1 = \mu_0 + 0,5\sigma_0$, $\sigma_1 = 1,2\sigma_0$. Adotando $n = 4$ e $\alpha_{\bar{X}} = \alpha_R = 0,0012$, obtemos $LSC_R = 5,25\sigma_0$ e $k = 3,24$. Recalculando o valor do poder do gráfico $\bar{X}$ e do gráfico R, obtemos

$$Pd_{\bar{X}} = 0,0309, \;\; Pd_R = 0,0110 \text{ e } Pd = 0,04156.$$

Comparando os Exemplos A e B, vemos que $Pd = 33\%$ quando $\lambda = 2$ (aumento de 100% em σ_0) e $Pd = 4,2\%$ quando $\lambda = 1,2$ (aumento de 20% em σ_0). A Figura 1 apresenta a curva de probabilidade de não-detecção (probabilidade dos gráficos de $\bar{X}$ e R ainda não terem sinalizado, ou seja, de todas as L primeiras observações de $\bar{X}$ e R após o desajuste caírem dentro dos limites de controle (os dois parâmetros estão desajustados). A Figura 1 compara as situações dos Exemplos A e B. Até a sétima amostra (inclusive) é quase certo que ao menos um dos gráficos, $\bar{X}$ ou R, já tenha sinalizado um deslocamento de 0,5σ_0 na média acompanhado de um aumento de 100% em σ_0 (Exemplo A); já, até a décima amostra, existe uma probabilidade superior a 60% de os gráficos de $\bar{X}$ e R não terem sinalizado um deslocamento de 0,5σ_0 na média acompanhado e um aumento de 20% em σ_0 (Exemplo B). Assim, os gráficos de $\bar{X}$ e R não são indicados para o monitoramento de processos sujeitos a pequenas perturbações. Alternativa: **Gráficos das Somas Acumuladas - CUSUM**.