

# **Gráficos de Controle para Processos Autocorrelacionados**

Gráfico de controle de Shewhart: observações independentes e normalmente distribuídas.

- Shewhart ao criar os gráficos de controle não exigiu que os dados fossem normalmente distribuídos (ver as distribuições das estatísticas  $R$ ,  $S$ , as contagens de defeitos e de unidades defeituosas).
- A violação da hipótese de independência reduz a aplicabilidade dos gráficos de controle convencionais.
- Na presença de autocorrelação, o risco  $\alpha$ , probabilidade de uma observação cair fora dos limites do gráfico, com o processo sob controle, aumenta e o com isso o número de Alarmes Falsos se eleva muito.
- Em geral, os processos contínuos e por batelada são frequentes na indústria. Esses processos raramente produzem observações independentes.

Para avaliar a associação (linear) entre duas variáveis quantitativas, dispomos do diagrama de dispersão e do coeficiente de correlação linear de Pearson.

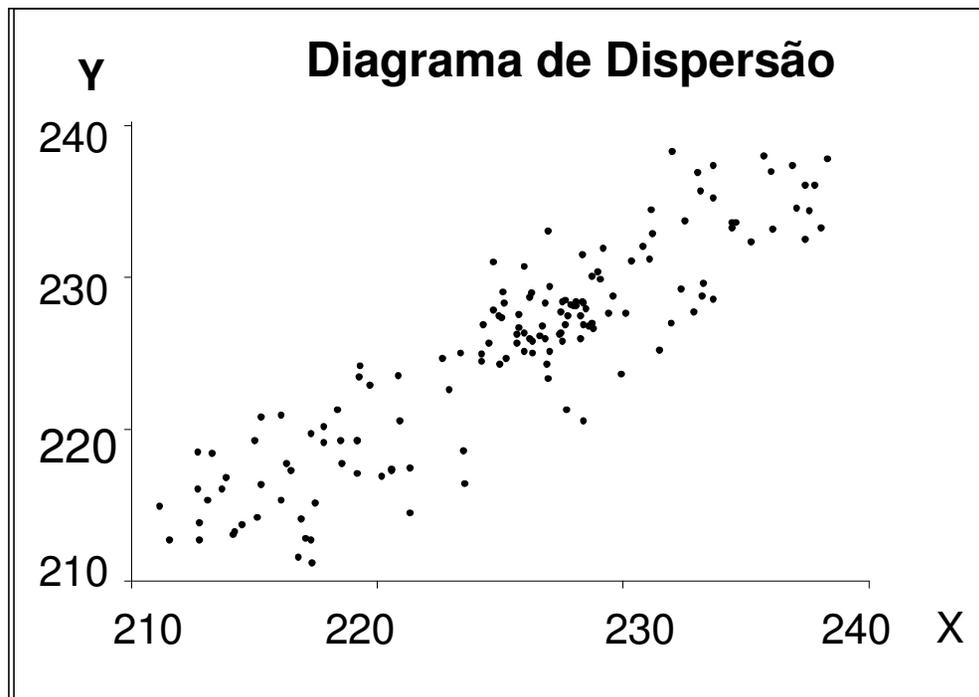


Figura 6.1. Exemplo de Diagrama de Dispersão com  $r_{XY}=0,9$

O coeficiente de correlação linear de Pearson entre X e Y

$$r_{XY} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})(y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{Y})^2}}$$

Para avaliar a correlação entre observações sucessivas de uma característica da qualidade X, isto é a correlação entre  $X_i$  e  $X_{i-k}$ , temos:

Coeficiente de *autocorrelação* amostral

$$r_k = \frac{\sum_{i=k+1}^n (x_i - \bar{X})(x_{i-k} - \bar{X})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2}$$

Com os coeficientes de autocorrelação amostrais, avaliamos o grau de autocorrelação dos dados de um processo.

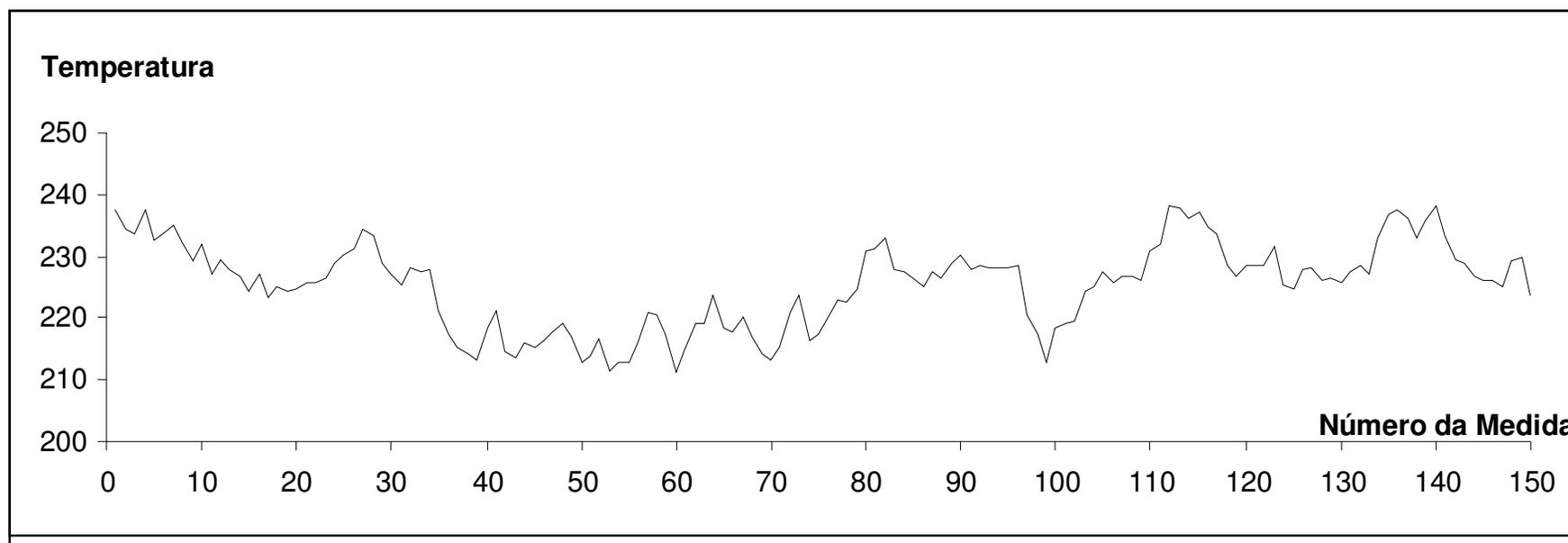


Figura 6.2. Série de Medidas da Temperatura do Banho Químico

Tabela 6.1: Série de Medidas da Temperatura de um Banho Químico

<b>i</b>	<b>X<sub>i</sub></b>	<b>X<sub>i+1</sub></b>	<b>X<sub>i+2</sub></b>	<b>X<sub>i+3</sub></b>
1	237,59	<b>234,40</b>	<b>233,66</b>	<b>237,42</b>
2	<b>234,40</b>	<b>233,66</b>	<b>237,42</b>	232,54
3	<b>233,66</b>	<b>237,42</b>	232,54	233,70
4	<b>237,42</b>	232,54	233,70	235,20
5	232,54	233,70	235,20	232,36
6	233,70	235,20	232,36	229,21
7	235,20	232,36	229,21	231,97
8	232,36	229,21	231,97	227,02
9	229,21	231,97	227,02	229,42
10	231,97	227,02	229,42	227,65

Tabela 6.2: Cálculos Intermediários para a Obtenção de  $r_1$

Número da Medida (i)	$X_i$	$X_{i+1}$	$X_i - \bar{X}$	$X_{i+1} - \bar{X}$	$(X_i - \bar{X})(X_{i+1} - \bar{X})$	$(X_i - \bar{X})^2$
1	237,59	234,40	12,27	9,09	111,547	150,635
2	234,40	233,66	9,09	8,35	75,852	82,601
3	233,66	237,42	8,35	12,11	101,083	69,655
4	237,42	232,54	12,11	7,22	87,485	146,691
5	232,54	233,70	7,22	8,38	60,547	52,175
148	229,09	229,95	3,78	4,64	17,530	14,301
149	229,95	223,64	4,64	-1,67	-7,737	21,487
150	223,64		-1,67			2,786
$\bar{X} =$	<b>225,31</b>			$\Sigma =$	<b>6196,093</b>	<b>6937,056</b>

Tabela 6.3: Coeficientes de autocorrelação amostrais

k	$r_k$	k	$r_k$
1	0,893	7	0,465
2	0,793	⋮	⋮
3	0,714	15	0,217
4	0,638	16	0,194

Para ilustrar o problema de Alarmes Falsos, vamos construir os gráficos usuais de  $\bar{X}$  e R. A cada 30 minutos, registram-se 3 temperaturas do banho, espaçadas de 3 minutos. Cada 3 temperaturas formam uma amostra. Seleccionamos 20 amostras.

Tabela 6.4: As 20 Primeiras Amostras da Temperatura do Banho Químico

Amostra	x1	x2	x3	R	$\bar{x}$
1	237,59	234,40	233,66	3,93	235,22
2	227,02	229,42	227,65	2,40	228,03
3	225,68	225,70	226,29	0,61	225,89
4	225,17	228,29	227,44	3,12	226,97
5	221,34	214,47	213,71	7,64	216,51
19	215,55	221,28	219,07	5,73	218,63
20	229,25	226,23	226,85	3,02	227,44

$$\bar{R} = 3,7103$$

$$\bar{\bar{x}} = 222,085$$

$$\bar{R}/d_2 = 3,703/1,693 = 2,187$$

- $LIC_R = 0$ ;  $LM_R = 3,703$ ;  $LSC_R = 9,531$ . Todos os pontos dentro dos limites.
- $LIC_{Média} = 222,298$ ;  $LM_{Média} = 226,085$ ;  $LSC_{Média} = 229,873$ . Vinte pontos fora dos limites.

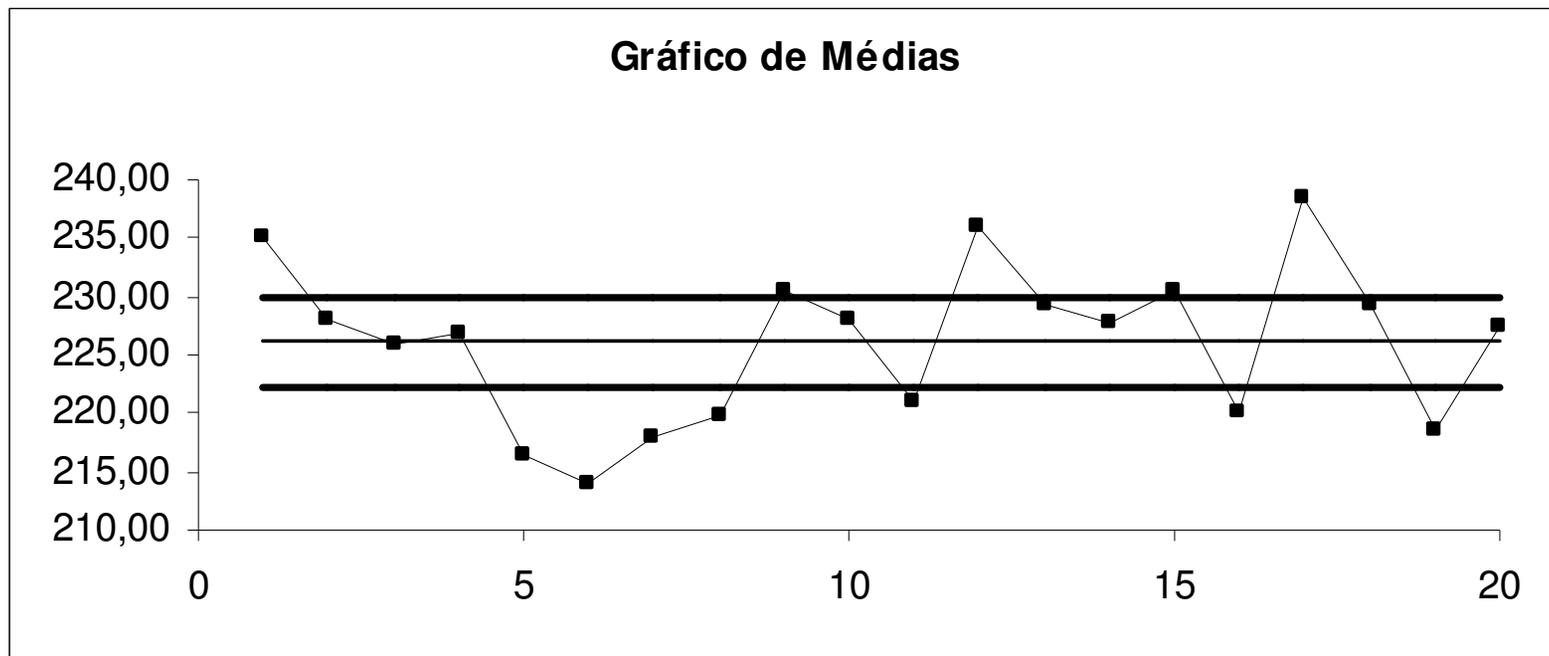


Figura 6.3: Gráficos de Controle para o Monitoramento da Temperatura de um Banho Químico, com vários alarmes falsos

## Serão esses pontos sinais de causas especiais?

A temperatura não varia muito entre medidas muito próximas no tempo. Assim, a dispersão dentro da amostra deve ser muito menor que a dispersão do processo. Em outras palavras, o estimador  $\bar{R}/d_2$  usado no cálculo dos limites do gráfico  $\bar{X}$  produz limites muito *estreitos* (muito próximos da linha média do gráfico.)

No exemplo, enquanto  $\bar{R}/d_2 = 2,187$ , a estimativa do desvio padrão do processo calculada com base em 60 observações é igual a 6,823, muito maior do que 2,187.

Para controlar um processo autocorrelacionado devemos espaçar as medidas por um intervalo de tempo suficientemente longo. Nesse caso, devemos tomar amostras de tamanho  $n = 1$ . Os gráficos de  $\bar{X}$  e de R são substituídos pelos gráficos de **Observações Individuais** e **Amplitude Móvel**, ou gráficos de **X** e **MR**. Periodicamente se toma apenas uma medida de X (característica da qualidade).

$$MR_i = \max\{x_i, x_{i-1}\} - \min\{x_i, x_{i-1}\}$$

$$LSC_X = \hat{\mu}_0 + 3\hat{\sigma}_0$$

$$LM_X = \hat{\mu}_0$$

$$LIC_X = \hat{\mu}_0 - 3\hat{\sigma}_0$$

$$\hat{\mu}_0 = \bar{X} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i$$

$$\hat{\sigma}_0 = S_D = \frac{\overline{MR}}{d_2}$$

$$\overline{MR} = \frac{\sum_{i=2}^m MR_i}{m-1}$$

Observar que  $d_2$  é obtido da tabela apropriada com base em  $(n = 2)$ .

Para o gráfico MR, os limites e a linha média são dados pelas expressões usuais para o gráfico R, considerando  $n = 2$ . Portanto:

$$LSC_{MR} = \hat{\mu}_{MR} + 3\hat{\sigma}_{MR}$$

$$LM_{MR} = \hat{\mu}_{MR}$$

$$LIC_{MR} = \max\{0, (\hat{\mu}_{MR} - 3\hat{\sigma}_{MR})\}$$

com  $\hat{\mu}_{MR} = d_2\hat{\sigma}_0$ ,  $\hat{\sigma}_{MR} = d_3\hat{\sigma}_0$  e com  $d_2$  e  $d_3$  calculados para  $n = 2$ , sendo  $\hat{\sigma}_0 = \overline{MR} / d_2$ .

## Exemplo 1

Tabela 6.5. Valores de X e de MR do processo  
(com intervalo de tempo de 1 hora)

Amostra	X	MR
1	227,02	
2	225,17	1,84
3	213,88	11,30
4	215,31	1,43
5	227,67	12,36
18	225,93	3,25
19	216,49	9,43
20	227,74	11,25
	$\bar{X} = 225,016$	$\overline{MR} = 7,102$

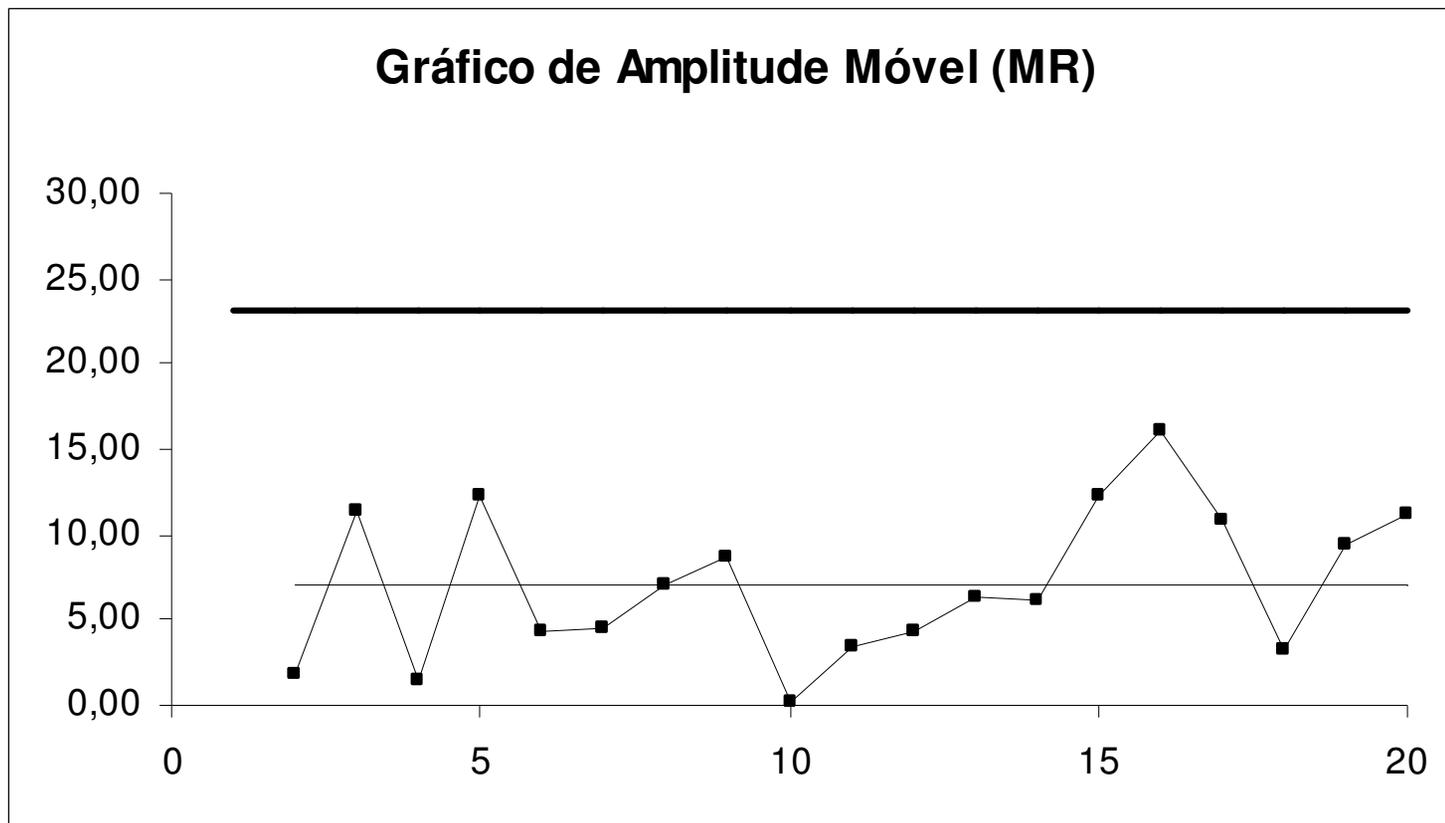


Figura 6.4: Gráficos de Amplitude Móvel (MR) e Observações Individuais (X)

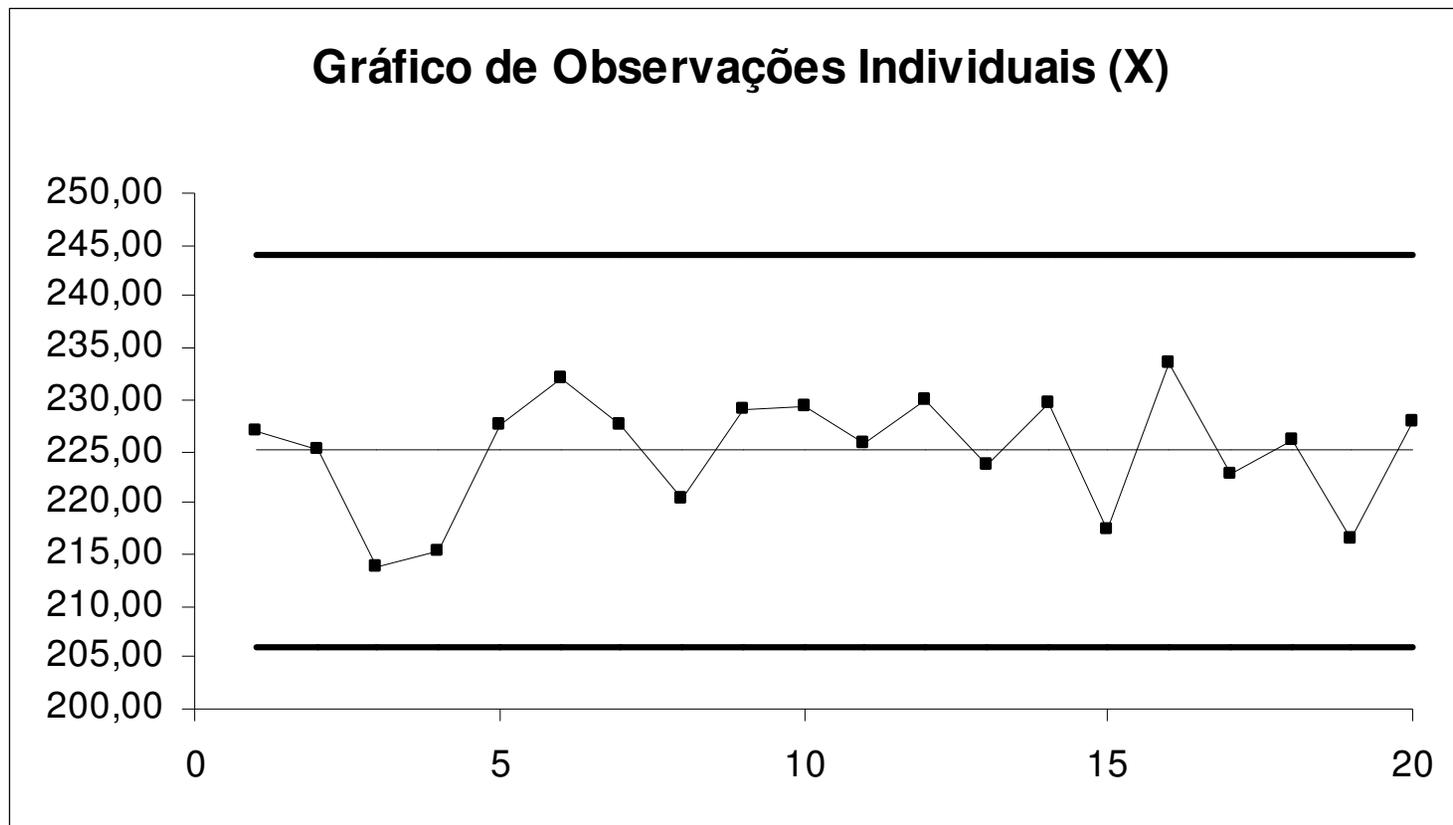


Figura 6.4: Gráficos de Amplitude Móvel (MR) e Observações Individuais (X)

No Exemplo 1 consideramos amostras de tamanho  $n = 1$  e aumentamos o intervalo de tempo entre amostras com o objetivo de eliminar a autocorrelação.

## Como determinar o menor intervalo de tempo entre amostras?

- Calcular a função de autocorrelação das observações  $\{r_1, r_2, r_3, \dots\}$  para diversos espaçamentos de tempo.
- Verificar o menor valor de  $k$  a partir do qual

$$r_k < 2/\sqrt{N},$$

onde  $N$  é o número de observações individuais usadas no cálculo dos coeficientes de correlação amostrais  $r_k$ .  
Recomenda-se usar  $N$  maior ou igual a 80.

- O intervalo de tempo mínimo  $h$  será igual a  $k$  vezes o espaçamento entre observações consecutivas utilizadas no cálculo dos  $r_k$ 's.

Para  $N = 150$ , temos  $2/\sqrt{N} = 0,163$ . Para um espaçamento inicial da série de 3 minutos,  $k = 10$  corresponde a  $h = 30$  minutos,  $k = 20$  corresponde a  $h = 60$  minutos,  $k = 40$  corresponde a  $h = 2$  horas, etc. Para os dados do banho químico,  $r_{19} = 0,155 < 0,163$ . Logo,  $h = 19 \times 3 = 57$  minutos devem ser suficientes para dissipar a autocorrelação. Notar que adotamos  $k = 20$  ( $h = 1$  hora) para garantir a independência com maior margem de segurança.

**E se o tempo adotado não for suficientemente longo para dissipar a autocorrelação?**

## Exemplo 2

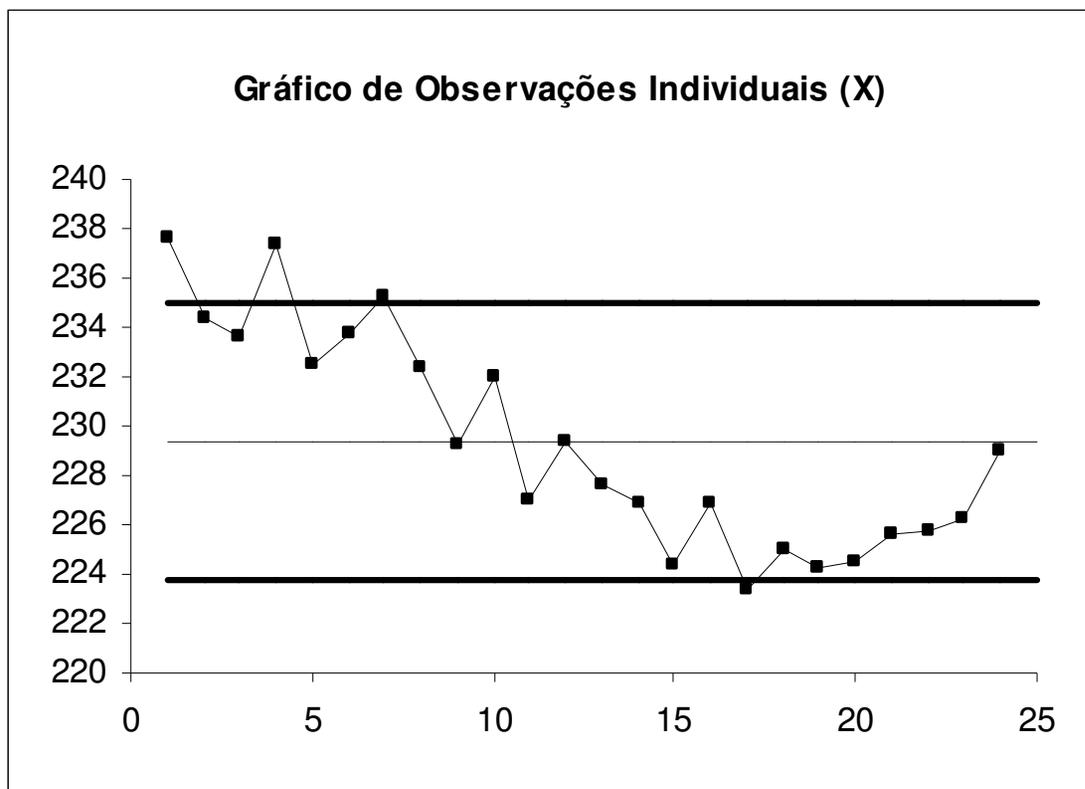


Figura 6.5: Gráficos de Observações Individuais com  $h=3\text{min}$

Distribuição da característica da qualidade  $X$  é a soma de duas parcelas:

- *nível médio de  $X$  que varia ao longo do tempo (série autocorrelacionada), e*
- *ruído ou variação aleatória de curto prazo, peça a peça, de média zero e independente no tempo.*

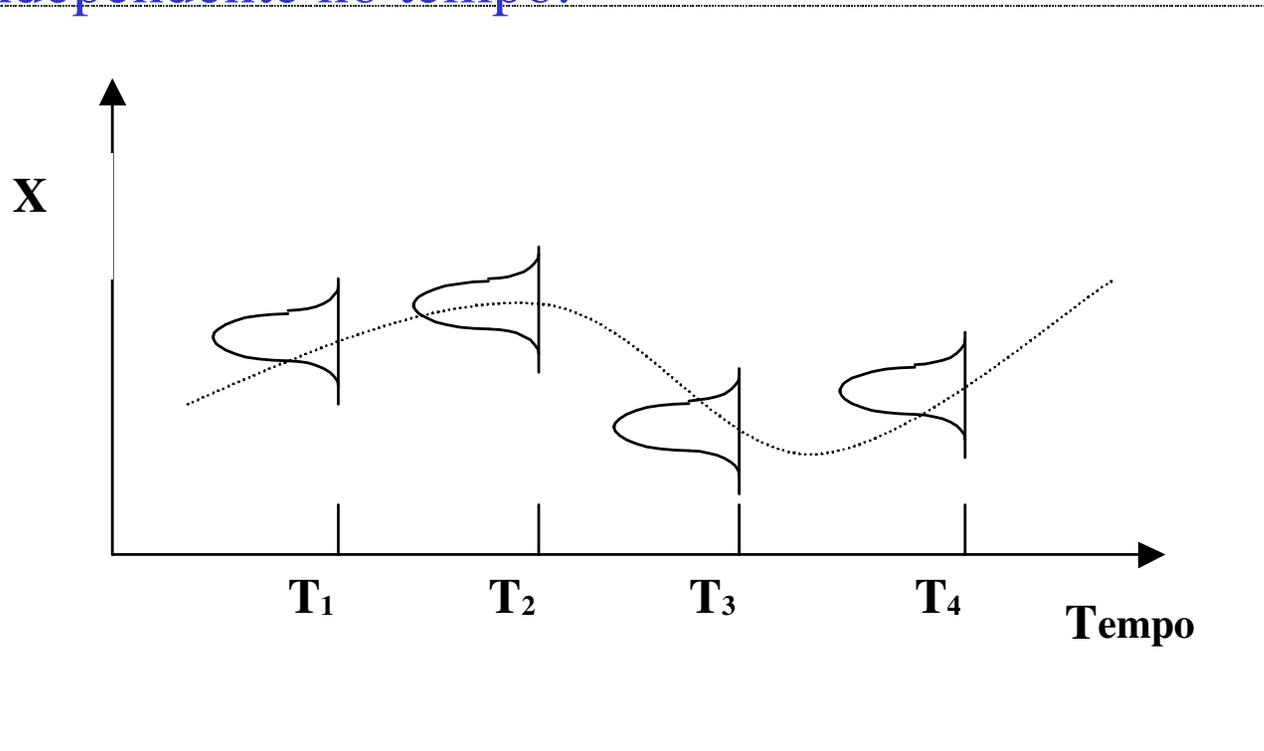


Figura 6.6: “Flutuações” da Distribuição de  $X$  ao Longo do Tempo

**Solução:** Alargar os limites do gráfico de  $\bar{X}$ .

$$\hat{\sigma}_{\bar{X}} = S_{\bar{X}}/c_4$$

$$S_{\bar{X}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m (\bar{X}_i - \bar{\bar{X}})^2}{m-1}}$$

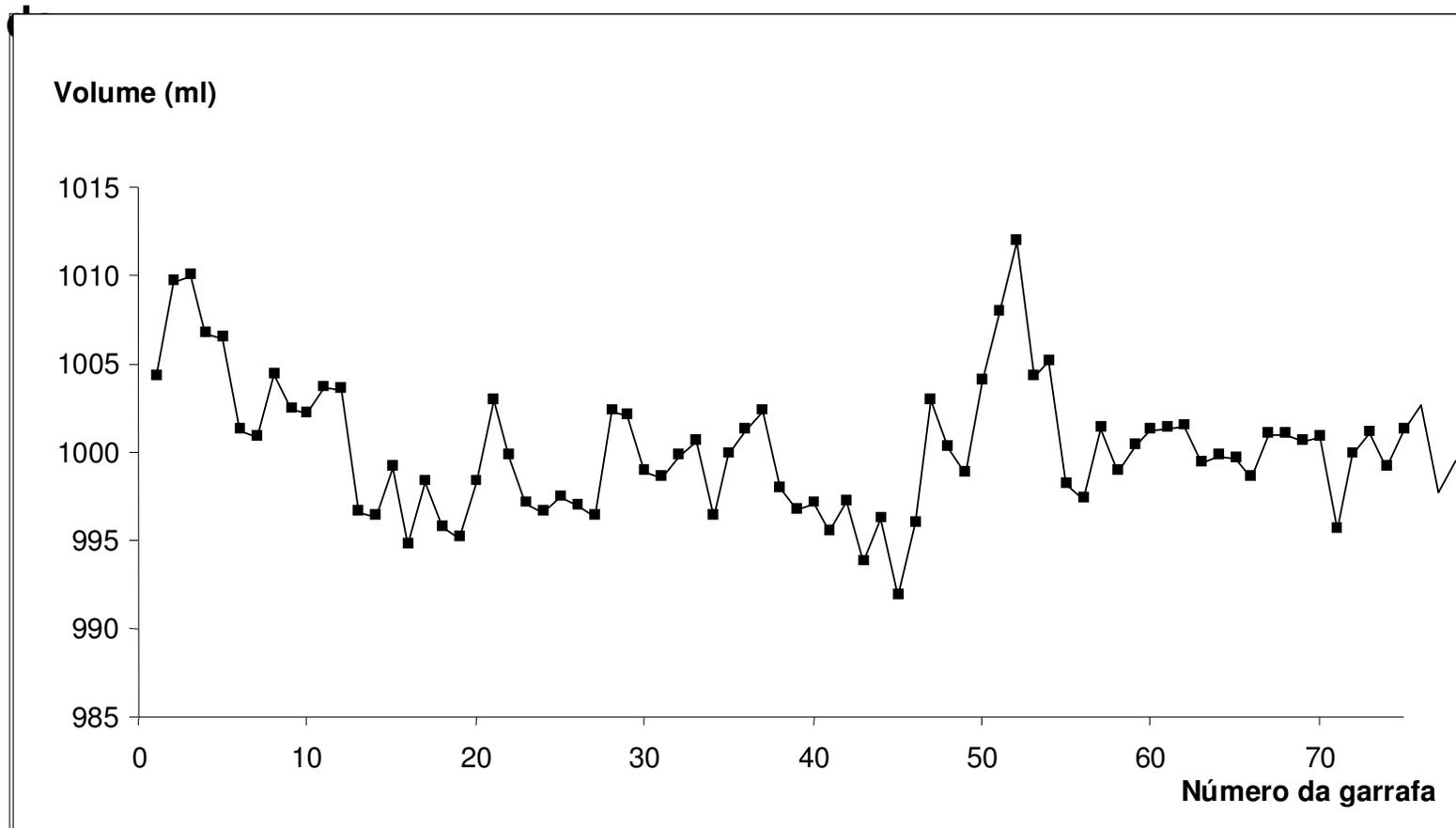
m: número de amostras iniciais de tamanho n;  $c_4$  determinado por meio de m;  $\hat{\mu}_0 = \bar{X}$ . O gráfico de R é o usual, não precisa ser alargado.

$$\text{LSC} = \hat{\mu}_0 + 3\hat{\sigma}_{\bar{X}}$$

$$\text{LM} = \hat{\mu}_0$$

$$\text{LIC} = \hat{\mu}_0 - 3\hat{\sigma}_{\bar{X}}$$

## Exemplo 3



**Figura 6.7: Gráfico do Volume de Refrigerante Versus Número da Garrafa**

Tabela 6.6: Volume de Refrigerante em Garrafas de 1000,00 ml.

Número da Garrafa (i)	Volume				
	$X_i$	$X_{i+1}$	$X_{i+2}$	$X_{i+3}$	$X_{i+4}$
1	1004,38	1009,72	1010,09	1006,77	1006,54
2	1009,72	1010,09	1006,77	1006,54	1001,35
3	1010,09	1006,77	1006,54	1001,35	1000,92
4	1006,77	1006,54	1001,35	1000,92	1004,46
5	1006,54	1001,35	1000,92	1004,46	1002,58

Tabela 6.8: Coeficientes de autocorrelação amostrais

k	$r_k$
1	0,654
2	0,414
3	0,287
4	0,154

Para controlar o processo com gráficos de  $\bar{X}$  (com limites alargados) e de R, foram coletadas  $m = 20$  amostras iniciais, espaçadas de uma hora, com  $n = 3$  observações cada uma.

$$S_{\bar{X}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m (\bar{X}_i - \bar{\bar{X}})^2}{m-1}} \quad \hat{\sigma}_{\bar{X}} = S_{\bar{X}} / c_4$$

Tabela 6.9: As 20 primeiras amostras do processo

Amostra	x1	x2	x3	R	$\bar{X}$
1	1001,47	1001,60	999,53	2,07	1000,87
2	1001,93	994,95	997,46	6,97	998,11
3	1000,74	1003,44	998,54	4,90	1000,91
4	1005,94	1002,98	998,89	7,06	1002,60
19	1004,45	1008,44	1004,59	3,99	1005,82
20	999,92	997,63	1002,02	4,39	999,86

$$\bar{R} = 3,827 \quad \bar{\bar{X}} = 999,685$$

$$\hat{\sigma}_{\bar{X}} = \mathbf{3,314}$$

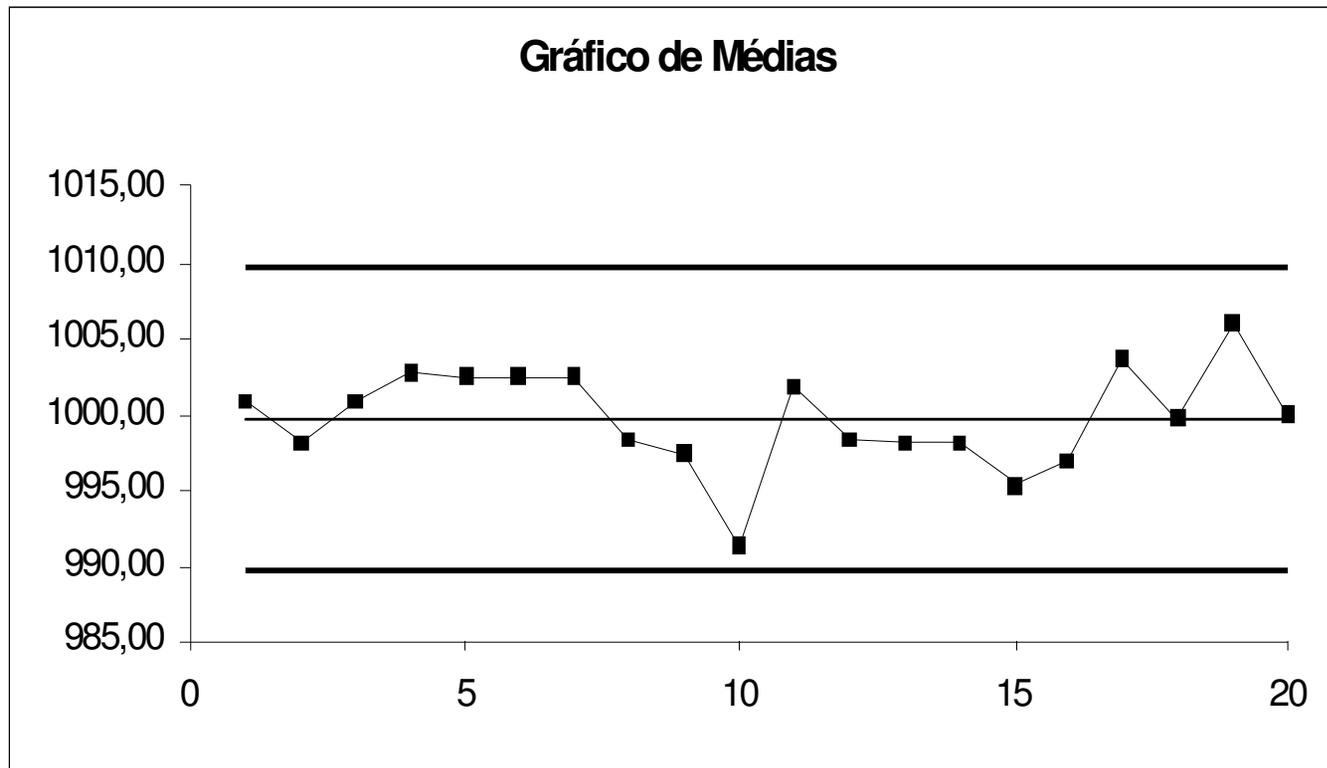


Figura 6.8: Gráficos da média com limites alargados e de R: limites definitivos

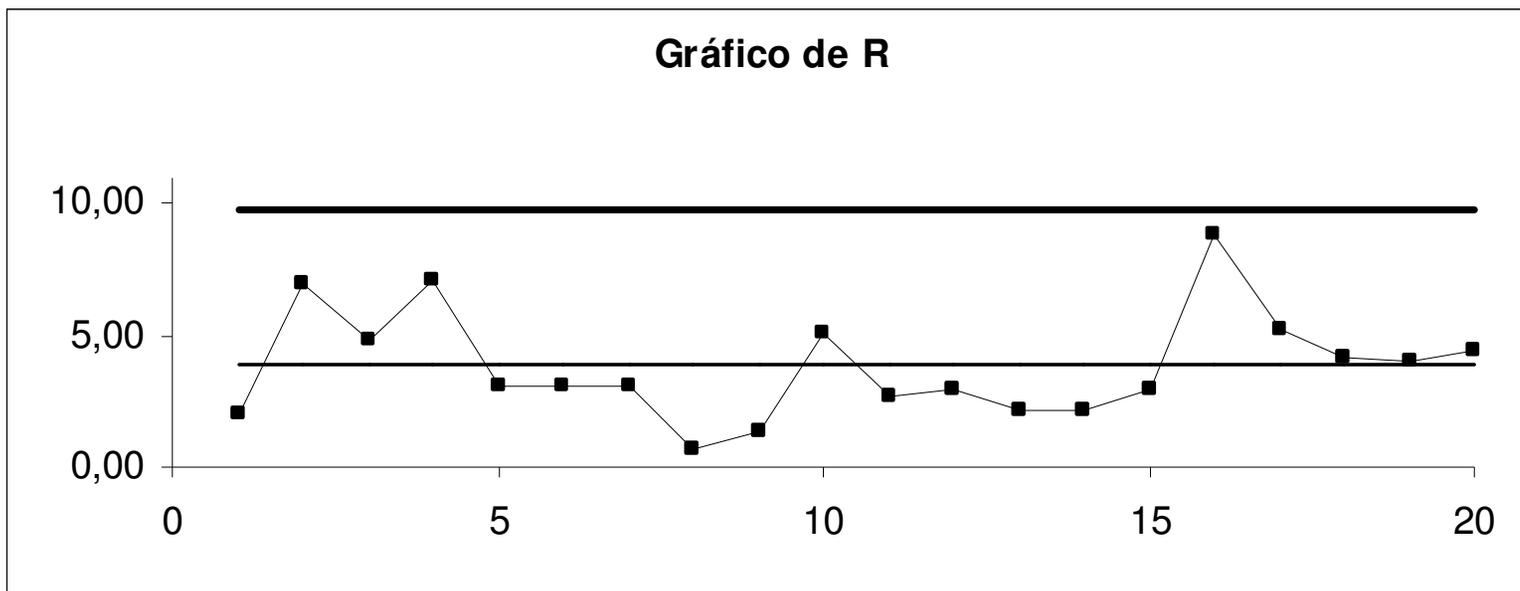


Figura 6.8: Gráficos da média com limites alargados e de R: limites definitivos