MAE532 – Controle Estatístico de Qualidade

2º semestre de 2013

Lista de exercícios 04 – CASA (gabarito)

Exercício 1.

Para avaliar a capacidade de medição de um relógio que mede uma característica de um eixo, 20 peças resultantes do processo são medidas duas vezes cada uma por um mesmo operador. Os dados, em décimos de mícrons, são apresentados na Tabela 1. Estime a variância devida ao instrumento de medição e a variância devida ao processo.

Tabela 1: Medida, em décimos de mícrons, de um relógio.

Peça	Medida 1	Medida 2	Peça	Medida 1	Medida 2
1	19	23	11	20	25
2	22	28	12	16	15
3	19	24	13	25	24
4	28	23	14	24	22
5	16	19	15	31	27
6	20	19	16	24	23
7	21	24	17	20	24
8	17	15	18	17	19
9	24	26	19	25	23
10	25	23	20	17	16

Solução:

A variância do processo é dada por

$$\sigma^2_{proc} = \sigma^2_{total} - \sigma^2_{med},$$

em que a variância devida ao instrumento de medição, quando temos apenas um operador é dada por

$$\sigma^2_{med} = \sigma^2_{repe} = \frac{\bar{R}}{d_2}$$

A variância total é dada por

$$\sigma^2_{tot} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r}(X_{ij} - \bar{\bar{X}})^2}{nr-1}, \qquad (1)$$

em que $n = 20$ é o número de peças, $r = 2$ é o número de medidas feitas pelo operador e $\bar{\bar{X}} = 21,8$ é a média aritmética global de todas as nr medidas. Assim, utilizando a equação (1) e os dados apresentados na Tabela 1, temos que $\sigma^2_{tot} = 15,395$.

Para os dados, $r = 2$, $d_2 = 1,128$ e $\bar{R} = 2,8$, então a variância devida a medição é

$\sigma^2_{med} = 6,162$. *E, finalmente, temos que*

$$\sigma^2_{proc} = 15,395 - 6,162 = 9,233.$$

□

Exercício 2.

Para analisar a capacidade de um instrumento de medida, 25 peças foram medidas por dois operadores; cada peça foi medida três vezes por operador. Obtiveram-se os resultados da Tabela 2.

Tabela 2: Resultado da medição de dois operadores.

	Operador 1	Operador 2
$\bar{\bar{x}}$	35,014	34,993
$\bar{R}$	0,190	0,170

(a) Estime a repetitividade e a reprodutibilidade desse método/instrumento de medida (isto é, os desvios padrões associados a cada uma dessas propriedades). E qual é o desvio padrão do erro de medição?

Solução:

O desvio padrão associado a repetitividade é dado, para mais de um operador, por

$$\hat{\sigma}_{repe} = \frac{\bar{\bar{R}}}{d_2} = \frac{(0,19 + 0,17)/2}{1,128} = 0,1063.$$

O desvio padrão associado a reprodutibilidade é dado por

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_{repro} &= \sqrt{\left(\frac{R_{\bar{\bar{x}}}}{d_2}\right)^2 - \frac{\hat{\sigma}^2_{repe}}{nr}} \\
&= \sqrt{\left(\frac{35,014 - 34,993}{1,128}\right)^2 - \frac{0,1063^2}{25 \times 3}} \\
&= 0,0140.
\end{aligned}$$

Por fim, o desvio padrão do erro de medição é

$$\hat{\sigma}_{med} = \sqrt{\hat{\sigma}^2_{repe} + \hat{\sigma}^2_{repro}} = \sqrt{0,1063^2 + 0,0140^2} = 0,1072.$$

□

(b) O desvio padrão total dos dados foi calculado, e é igual a 0,47. A capacidade do sistema de medição é adequada em relação à variabilidade dos dados? Justifique.

Solução:
Primeiro, precisamos calcular a seguinte razão:

$$\%R\&R = \frac{\hat{\sigma}_{med}}{\hat{\sigma}_{tot}} \times 100 = \frac{0,1072}{0,47} \times 100 = 22,8.$$

Como $10 < \%R\&R \leq 30$*, dizemos que a capacidade do sistema de medição pode ser adequado dependendo da importância da aplicação do custo do instrumento, do custo de manutenção etc (Tabela 5.1, Costa et al., 2008).* □

Exercício 3.

Os dados que seguem referem-se a concentração de um processo químico medida a cada 3 minutos.

Tabela 3: Concentração de um processo químico.

Medida	Concentração	Medida	Concentração	Medida	Concentração
1	204	36	211	71	196
2	202	37	212	72	197
3	201	38	214	73	197
4	202	39	210	74	203
5	197	40	208	75	205
6	201	41	208	76	194
7	198	42	209	77	199
8	188	43	209	78	201
9	195	44	206	79	198
10	189	45	200	80	202
11	195	46	203	81	208
12	192	47	202	82	209
13	196	48	195	83	209
14	194	49	196	84	206
15	196	50	203	85	200
16	199	51	196	86	203
17	197	52	197	87	202
18	197	53	197	88	195
19	192	54	203	89	196
20	195	55	205	90	203
21	190	56	194	91	196
22	196	57	199	92	197
23	199	58	201	93	197
24	203	59	198	94	203
25	199	60	202	95	205
26	207	61	208	96	194
27	204	62	209	97	194
28	207	63	209	98	198
29	209	64	206	99	196
30	205	65	200	100	200
31	202	66	203		
32	200	67	202		
33	208	68	195		
34	214	69	196		
35	205	70	203		

(a) Calcule a função de autocorrelação amostral e interprete os resultados.

Solução:

A fórmula de autocorrelação amostral é dada por

$$r_k = \frac{\sum_{i=k+1}^{n}(x_i - \bar{X})(x_{i-k} - \bar{X})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X})^2}.$$

Apresentamos na Tabela 4 as autocorrelações para $k = 1, \ldots, 8$.

Tabela 4: Autocorrelações.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
r_k	0,66	0,52	0,50	0,41	0,29	0,17	0,15	0,19	0,10	0,01

Para $r_k < 2/\sqrt{100} = 0,20$ *consideramos que não existe efeito de autocorrelação. Então para* $k \geq 6$ *parece existir independência entre as observações e como cada intervalo é equivalente a 3 minutos, intervalos a partir de 18 minutos é desejável para a observação da concentração de um processo.* □

(b) Construa os gráficos de controle X e MR apropriados.

Solução:

A amplitude móvel é dada pela expressão:

$$MR_i = \max\{x_i, x_{i-1}\} - \min\{x_i, x_{i-1}\},$$

na Tabela 5, apresentamos as amplitudes móveis, calculadas utilizando o software `R` *(R Core Team, 2012), para os dados da Tabela 3.*

Tabela 5: MR_i.

-	2	1	1	5	4	3	10	7	6	6	3	4	2	2	3	2	0	5	3	5	6	3	4	4
8	3	3	2	4	3	2	8	6	9	6	1	2	4	2	0	1	0	3	6	3	1	7	1	7
7	1	0	6	2	11	5	2	3	4	6	1	0	3	6	3	1	7	1	7	7	1	0	6	2
11	5	2	3	4	6	1	0	3	6	3	1	7	1	7	7	1	0	6	2	11	0	4	2	4

As estimativas para $\hat{\mu}_0$ *e* $\hat{\sigma}_0$ *são dadas, respectivamente, por*

$$\hat{\mu}_0 = \bar{X} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i = 200,9.$$

$$\hat{\sigma}_0 = S_D = \left(\frac{1}{m-1} \sum_{i=2}^{m} MR_i \right) / d_2 = 3,331.$$

Na Figura 1 está apresentado o gráfico de controle para X, construído a partir dos limites

$$\begin{aligned} LSC_X &= \hat{\mu}_0 + 3\hat{\sigma}_0 = 210,894 \\ LM_X &= \hat{\mu}_0 = 200,9 \\ LIC_X &= \hat{\mu}_0 - 3\hat{\sigma}_0 = 190,906 \end{aligned}$$

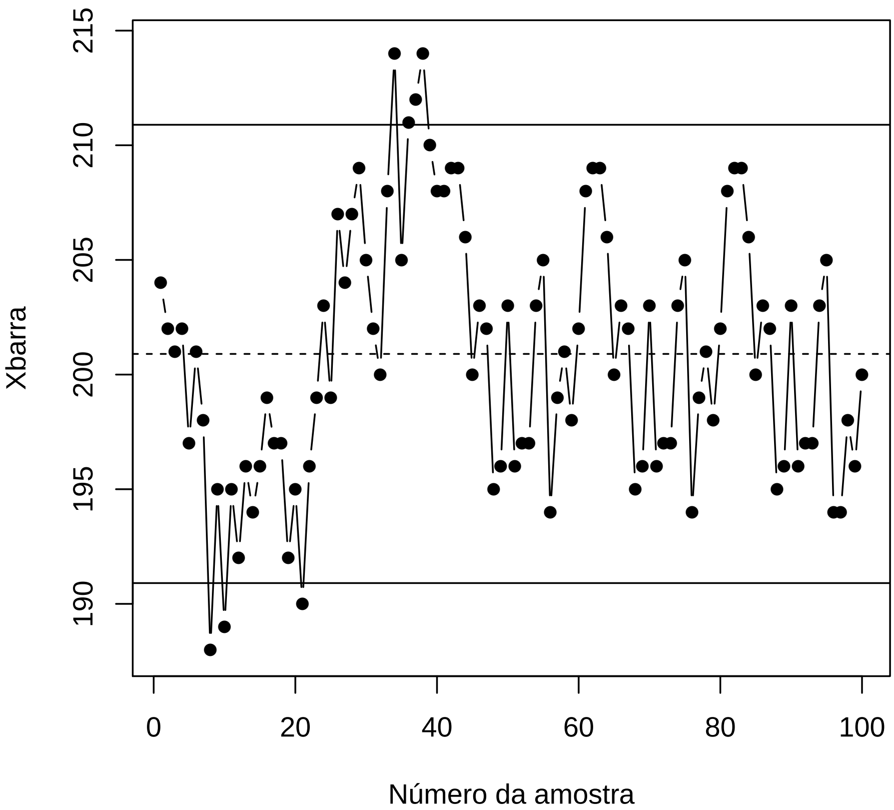

Figura 1: Gráfico das observações individuais.

Pela Figura 1, observamos que quatro pontos ficaram acima do limite superior de controle e 3 pontos ficaram abaixo do limite inferior de controle, parece haver um descontrole na primeira metade das observações.

Na Figura 2 está apresentado o gráfico de controle para MR, construído a partir dos limites

$$\begin{aligned} LSC_{MR} &= \hat{\sigma}_0(d_2 + 3d_3) = 12,282 \\ LM_{MR} &= d_2\hat{\sigma}_0 = 3,758 \\ LIC_{MR} &= 0. \end{aligned}$$

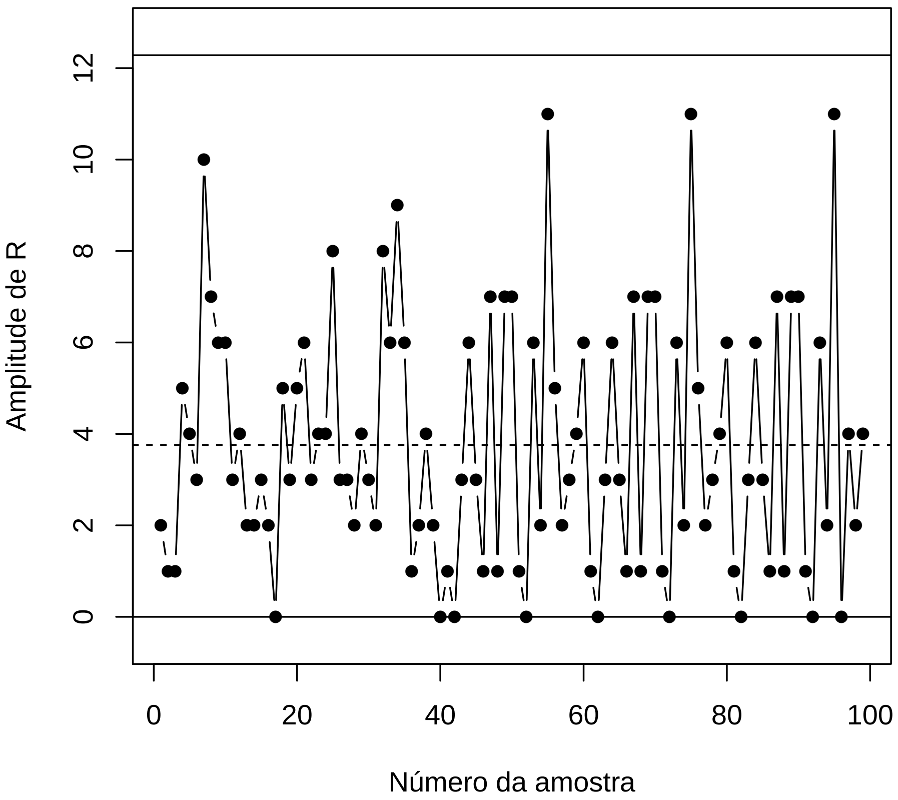

Figura 2: Gráfico de amplitude móvel.

Pela Figura 2, observamos que todos os pontos ficaram abaixo do limite superior de controle, indicando um processo sem causas especiais. □

(c) Discuta o intervalo adotado para retirada de amostras.

Solução:

Com um intervalo mínimo de 18 minutos entre as observações, podemos supor que as medidas de concentração de um processo químico são independentes. □

Referências Bibliográficas

Costa, A. F. B., E. K. Epprech, and L. C. R. Carpinetti (2008). *Controle Estatístico de Qualidade. 2 ed.* São Paulo: Editora Atlas.

R Core Team (2012). *R: A Language and Environment for Statistical Computing.* Vienna, Austria: R Foundation for Statistical Computing.