

**MAT0317 & MAT5741 - TOPOLOGIA GERAL**  
**1º SEMESTRE 2025**

**LISTA 1**

1. Dados conjuntos  $A$ ,  $B$  e  $C$  e  $\mathcal{C}$  uma coleção não vazia de conjuntos, decida se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa. Prove ou dê um contra-exemplo.

(a)  $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$

(b)  $\wp(\bigcap \mathcal{C}) = \bigcap \{\wp(C) : C \in \mathcal{C}\}$

(c)  $\wp(\bigcup \mathcal{C}) = \bigcup \{\wp(C) : C \in \mathcal{C}\}$

(d)  $A \setminus \bigcup \mathcal{C} = \bigcap \{A \setminus C : C \in \mathcal{C}\}$

(e)  $A \setminus \bigcap \mathcal{C} = \bigcup \{A \setminus C : C \in \mathcal{C}\}$

2. Para cada item abaixo, determine  $\bigcup \mathcal{C}$  e  $\bigcap \mathcal{C}$ , onde os intervalos são tomados em  $\mathbb{R}$ .

(a)  $\mathcal{C} = \{[-n, n] : n \in \mathbb{N}, n \neq 0\}$

(b)  $\mathcal{C} = \{]-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}[ : n \in \mathbb{N}, n \neq 0\}$

(c)  $\mathcal{C} = \{]a, b[ : a, b \in \mathbb{Q}, a < b\}$

(d)  $\mathcal{C} = \{[r, +\infty[ : r \in \mathbb{R}\}$

3. Sejam  $f : X \rightarrow Y$  uma função,  $A \subseteq X$ ,  $B \subseteq Y$ ,  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$  coleções não vazias de subconjuntos de  $X$  e de  $Y$ , respectivamente. Para cada item abaixo, decida se é necessário e suficiente que a função seja injetora/sobrejetora/bijetora para que a afirmação verdadeira. Prove que a eventual hipótese é necessária e suficiente.

(a)  $f(X \setminus A) = Y \setminus f(A)$

(b)  $f^{-1}(Y \setminus B) \subseteq X \setminus f^{-1}(B)$

(c)  $f^{-1}(Y \setminus B) \supseteq X \setminus f^{-1}(B)$

(d)  $f(\bigcup \mathcal{C}) = \bigcup \{f(C) : C \in \mathcal{C}\}$

(e)  $f^{-1}(\bigcup \mathcal{D}) = \bigcup \{f^{-1}(D) : D \in \mathcal{D}\}$

(f)  $f(\bigcap \mathcal{C}) = \bigcap \{f(C) : C \in \mathcal{C}\}$

(g)  $f^{-1}(\bigcap \mathcal{D}) = \bigcap \{f^{-1}(D) : D \in \mathcal{D}\}$