MAT0317 & MAT5741 - TOPOLOGIA GERAL
1º SEMESTRE 2025

LISTA 2

1. Sejam $X = \{0, 1\}$ e $Y = \{0, 1, 2\}$. Determine todas as possíveis topologias sobre X e sobre Y.

2. Seja X um conjunto e seja $A \subseteq X$. Considere

$$\tau = \{U \subseteq X : A \subseteq U\} \cup \{\emptyset\}.$$

Prove que (X, τ) é um espaço topológico.

3. Prove que a topologia usual

$$\tau_S = \{U \subseteq \mathbb{R} : \forall x \in U\ \exists \varepsilon > 0 \text{ tal que }]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\ \subseteq U\}$$

é de fato uma topologia sobre a reta real $\mathbb{R}$.

4. Prove que se X é um conjunto não-enumerável então a topologia co-enumerável

$$\tau_S = \{U \subseteq X : X \setminus U \text{ é enumerável}\} \cup \{\emptyset\}$$

é de fato uma topologia em X.

5. Considere $\mathbb{R}_S$, ou seja, a reta real munida da topologia de Sorgenfrey

$$\tau_S = \{U \subseteq \mathbb{R} : \forall x \in U\ \exists \varepsilon > 0 \text{ tal que } [x, x + \varepsilon[\ \subseteq U\}$$

Determine $int(A)$ e $\overline{A}$, nos seguintes casos: $A = [0, 1[$; $A =]0, 1[$; $A =]0, 1[\cup]1, 2[$; $A = \mathbb{Z}$; $A = \mathbb{Q}$.

6. Dizemos que duas métricas são equivalentes se elas induzem a mesma topologia. Mostre que, dado um espaço métrico qualquer (X, d), existe uma métrica d' sobre X equivalente a d e limitada (i.e. existe $M > 0$ tal que $d'(x, y) \leq M$ para quaisquer $x, y \in X$).
7. Sejam $n \geq 1$ e $p \in [1, \infty]$. Para cada n-upla $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de números reais, defina

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \quad \text{se } p < \infty, \text{ e}$$

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \quad \text{se } p = \infty.$$

   (a) Seja $p = 1, 2$ ou ∞. Mostre que $d_p(x, y) = \|x - y\|_p$ define uma métrica sobre $\mathbb{R}^n$.
   (b) Mostre que as métricas acima sâo equivalentes.
   (c) Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ tais que, na norma euclidiana, vale a seguinte igualdade $\|x-z\| = \|x - y\| + \|y - z\|$. Prove que existe $t \in [0, 1]$ tal que $y = (1 - t)x + tz$. Mostre ainda que isso não vale nas normas da soma ou do máximo.
8. Seja (X, d) um espaço métrico. Dados $x \in X$ e $A \subseteq X$, definimos $d(x, A) = \inf\{d(x, y) : y \in A\}$. Mostre que $\overline{A} = \{x \in X : d(x, A) = 0\}$.
9. Seja X um conjunto (infinito) munido da topologia cofinita. Descreva $\overline{A}$ e $int(A)$, para cada $A \subseteq X$.
10. Considere a reta real $\mathbb{R}$ munida de sua topologia usual. Mostre que se S é um subgrupo aditivo de $\mathbb{R}$, então ou $\overline{S} = S$ ou $\overline{S} = \mathbb{R}$. *Sugestão: considere* $a = \inf\{x \in S : x > 0\}$ *e analise os casos* $a = 0$ *e* $a > 0$.
11. Seja (X, τ) um espaço topológico e sejam $A, B \subseteq X$.
    (a) Prove que $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$ e $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$.
    (b) Dê exemplos em que as inclusões inversas não valem.