MAT0317 & MAT5741 - TOPOLOGIA GERAL
1º SEMESTRE 2025

LISTA 3

1. Sejam X um conjunto e $\mathcal{T}$ uma coleção não-vazia de topologias sobre X. Mostre que $\bigcap \mathcal{T}$ é uma topologia sobre X.
2. Se (X, τ) é um espaço topológico e $A \subseteq X$, considere ∂A o conjunto dos pontos de fronteira de A. Prove que:
   (a) $\overline{A} = A \cup \partial A$ e $int(A) = A \setminus \partial A$;
   (b) Se $\mathcal{B}_x$ é uma base local para certo $x \in X$, então
   $$\partial A = \{x \in X : \text{ para todo } U \in \mathcal{B}_x,\ U \cap A \neq \emptyset \text{ e } U \cap (X \setminus A) \neq \emptyset\}.$$
3. Se (X, τ) é um espaço topológico e $A \subseteq X$, considere A' o conjunto dos pontos de acumulação de A. Prove que:
   (a) $\overline{A} = A \cup A'$;
   (b) Se $\mathcal{B}_x$ é uma base local para certo $x \in X$, então
   $$A' = \{x \in X : \text{ para todo } U \in \mathcal{B}_x,\ U \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset\}.$$
4. Seja (X, τ) um espaço topológico. Dizemos que uma família $\mathcal{C} \subseteq \tau$ é uma subbase para τ se a família formada por todas as intersecções finitas de elementos de $\mathcal{C}$ forma uma base para τ. Prove que $\mathcal{C} = \{(a, +\infty), (-\infty, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ é uma subbase para a topologia usual em $\mathbb{R}$.
5. Sejam X um conjunto, (Y, τ) um espaço topológico e $f : X \to Y$ uma função. Mostre que $\theta = \{f^{-1}[U] : U \in \tau\}$ define uma topologia sobre X. Mais ainda, mostre que se $\mathcal{B}$ é uma base de (Y, τ), então $\mathcal{C} = \{f^{-1}[B] : B \in \mathcal{B}\}$ é uma base de (X, θ).

6. Sejam X um conjunto e $\{Y_j : j \in J\}$ uma família de espaços topológicos. Para cada $j \in J$, seja $f_j : X \to Y_j$ uma função. Mostre que a coleção

$$\mathcal{S} = \{f_j^{-1}[U] : j \in J \text{ e } U \subset Y_j \text{ aberto}\}$$

define uma subbase para X.

7. Dizemos que um espaço topológico é zero-dimensional se possui uma base formada por abertos fechados. Prove que cada um dos espaços abaixo é zero-dimensional:
   (a) A reta real $\mathbb{R}$ munida da topologia de Sorgenfrey;
   (b) $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ munidos da topologia de subespaço de $\mathbb{R}$ (com a topologia usual).