MAT0317 & MAT5741 - TOPOLOGIA GERAL
1º SEMESTRE 2025

LISTA 4

1. Mostre que a reta real com a topologia de Sorgenfrey não satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade.
2. Seja X um conjunto infinito munido da topologia cofinita. Mostre que uma função sobrejetora $f : X \to X$ é contínua se, e somente se, para todo $x \in X$, $f^{-1}(\{x\})$ é finito.
3. Considere $f : (\mathbb{R}, \tau_1) \to (\mathbb{R}, \tau_2)$ definida por $f(x)$ é o maior número inteiro menor ou igual a x. Para cada item, decida se a função f é contínua e justifique sua resposta:
   (a) $\tau_1 = \tau_2$ é a topologia usual.
   (b) $\tau_1 = \tau_2$ é a topologia de Sogenfrey.
   (c) τ_1 é a topologia de Sogenfrey e τ_2 é a topologia usual.
   (d) τ_1 é a topologia usual e τ_2 é a topologia de Sogenfrey.
4. Sejam X e Y espaços topológicos, $f : X \to Y$ uma função e A um subconjunto de X munido com sua topologia de subespaço. Decida se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa e justifique sua resposta:
   (a) Se $f|_A$ é contínua, então f é contínua em todo ponto de A.
   (b) Se f é contínua em todo ponto de A, então $f|_A$ é contínua.
5. Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma função. Mostre que f é contínua se, e somente se, para todo $A \subseteq X$, $f[\overline{A}] \subseteq \overline{f[A]}$.
6. Dado X um espaço topológico e $A \subseteq X$, a função característica de $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ é definida por $\chi_A(x) = 1$, se $x \in A$ e $\chi_A(x) = 0$ caso contrário. Mostre que χ_A é contínua se, e somente se, A é um aberto fechado.
7. Mostre que se D é um subconjunto denso de X e $f : X \to \mathbb{R}$ é uma função contínua tal que $f|_D = 0$, então $f(x) = 0$ para todo $x \in X$.
8. Prove que quaisquer dois intervalos abertos de $\mathbb{R}$ são homeomorfos.