MAT0317 & MAT5741 - TOPOLOGIA GERAL
1º SEMESTRE 2025

LISTA 5

1. Sejam I um conjunto de índices não-vazio e, para cada $i \in I$, (X_i, τ_i) um espaço topológico. Considere as projeções π_i do espaço produto X em X_i dada por $\pi_i((x_j)_{j\in I}) = x_i$. Mostre que cada π_i é sobrejetora, contínua e aberta.
2. Seja $(X_i, \tau_i)_{i\in I}$ uma família de espaços topológicos que têm base enumerável. Mostre que o espaço produto $(\prod_{i\in I} X_i, \tau)$ tem base enumerável se, e somente se, o conjunto $J = \{i \in I : \tau_i \neq \{\emptyset, X_i\}\}$ é enumerável.
3. Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma função contínua. O gráfico de f é o conjunto
$$Gr(f) := \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}.$$
Considere em $Gr(f)$ a topologia de subespaço herdada de $X \times Y$. Prove que X é homeomorfo a $Gr(f)$.
4. Seja $\pi : X \to Y$ uma aplicação quociente. Prove que:
   (a) π é aberta se, e somente se, $\pi^{-1}[\pi[U]]$ é aberto para todo U aberto em X.
   (b) π é fechada se, e somente se, $\pi^{-1}[\pi[F]]$ é fechado para todo F fechado em X.
5. Considere $X = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ e $\tau = \{Y \subseteq X : (\infty \notin Y) \text{ ou } (\infty \in Y \text{ e } Y \text{ é cofinito})\}$. Mostre que:
   (a) τ é uma topologia sobre X e que (X, τ) é homeomorfo a qualquer sequência convergente não trivial;
   (b) $\mathbb{N}$ é denso em X;
   (c) existe $f : \mathbb{N} \to [0, 1]$ contínua tal que não existe $\tilde{f} : X \to [0, 1]$ contínua que estende f.

6. Dadas duas sequências infinitas $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reais convergentes a x e y, respectivamente, tais que $x_n \neq x_m$ se $n \neq m$ e $x_n \neq x$ para todo $n \in \mathbb{N}$, mostre que existe uma função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x_n) = y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $f(x) = y$.
7. Seja (X, τ) um espaço topológico e $Y \subseteq X$ um subespaço. Para cada $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, decida se a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa (e prove ou dê um contra-exemplo):

   "se X é T_i, então Y é T_i."
8. Seja X um espaço topológico . Mostre que X é T_1 se, e somente se, para todo $A \subset X$ e todo x ponto de acumulação de A em X, tem-se que $V \cap A$ é um conjunto infinito sempre que V é uma vizinhança de x.
9. Mostre que $\mathbb{Q}$ munido da topologia induzida pela topologia de Sorgenfrey de $\mathbb{R}$ é normal.
10. Sejam X e Y espaços topológicos com X sendo T_4. Prove que se existe uma função $f : X \to Y$ contínua, fechada e sobrejetora, então Y é T_4.
11. Seja (X, τ) um espaço topológico. Mostre que:
    (a) se X satisfaz é regular, então X satisfaz T_2;
    (b) se X satisfaz é normal, então X satisfaz T_2 e T_3.
12. Mostre que existem $F, G \subseteq \mathbb{R}$ fechados disjuntos não-vazios tais que $d(F, G) := \inf\{d(x, y) : x \in F, y \in G\} = 0$. Compare este exemplo com o fato que $\mathbb{R}$ satisfaz T_4.