Teorema de Pitágoras

OBJETIVO: Desenvolver habilidades relacionadas a visualização por meio da apresentação de uma prova do Teorema de Pitágoras que suscita o pensamento geométrico e instiga a criatividade.

TEOREMA: Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos.

PROVA:

Esta é uma prova por comparação de áreas.

A área de um quadrado construído sobre um segmento de reta de comprimento X é igual a X^2. Então, sendo A e B os comprimentos dos catetos do triângulo retângulo e C o comprimento da hipotenusa, então o teorema pode ser reescrito assim:

A soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos equivale à área do quadrado construído sobre a hipotenusa.

$$A^2 + B^2 = C^2$$

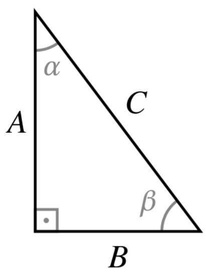
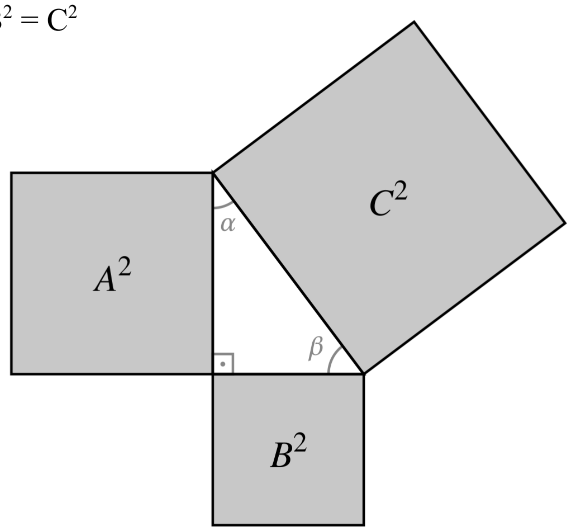
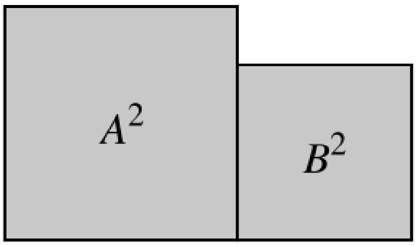


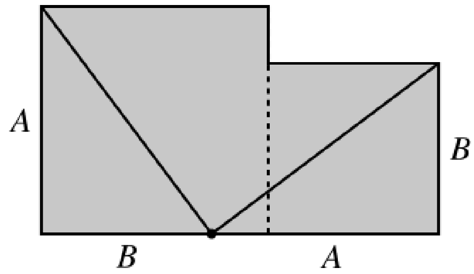
Imagem 1



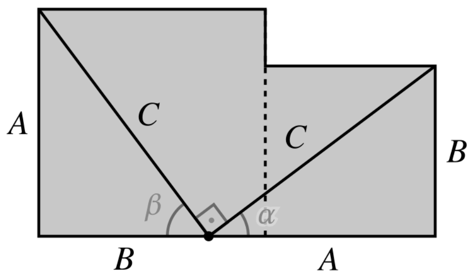
Então, as áreas A^2 e B^2 dos quadrados construídos sobre os catetos podem ser rearranjadas, sem sobreposição, para formar um quadrado de lado C^2, congruente ao quadrado construído sobre a hipotenusa.

Primeiro, o quadrado de área A^2 é colocado à esquerda do quadrado de lado B^2, de forma que a figura resultante tem base de comprimento A + B. Depois são traçados dois segmentos que ligam um vértice de cada quadrado ao ponto que reparte a base, deixando o comprimento B à esquerda e o comprimento A à direita, como na imagem abaixo:

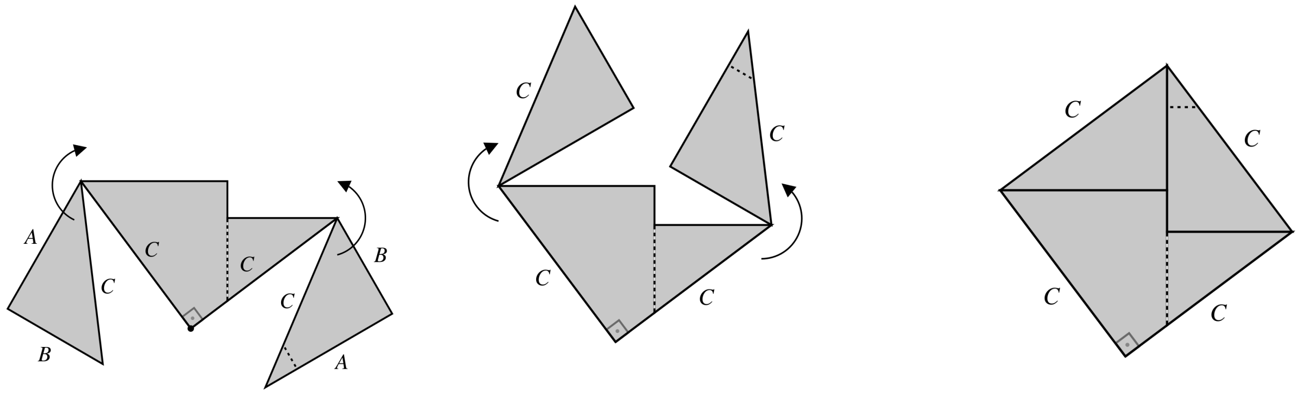




Os segmentos traçados delimitam dois triângulos congruentes ao da Imagem 1, porque são triângulos retos de catetos A e B. Logo, os segmentos traçados, por serem as hipotenusas dos triângulos, têm comprimento C. ; e os ângulos agudos são α e β O ângulo entre os dois segmentos mede $180^o - (\alpha + \beta)$; já que $\alpha + \beta = 90^o$, então o ângulo mede 90^o.

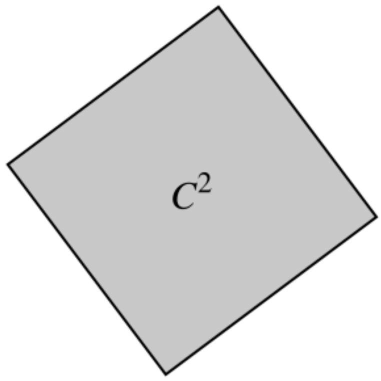


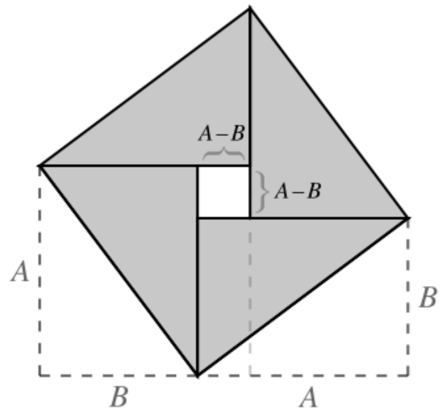
Cortando a figura sobre os segmentos de comprimento C e fazendo a rotação indicada abaixo, tem-se um quadrilátero com lados de comprimento C e pelo menos um dos ângulos retos — portanto, um quadrado de área C^2. Como esse quadrado foi obtido pela junção de partes dos quadrados menores, de áreas A^2 e B^2, então verifica-se $A^2 + B^2 = C^2$.



Prova algébrica

A igualdade $A^2 + B^2 = C^2$ também pode ser verificada algebricamente: o quadrado de área C^2 é congruente à figura obtida pela junção de quatro triângulos de base A e altura B e um quadrado de lado A - B. Então, tem -se:





$$C^2 = 4 \cdot \frac{A \cdot B}{2} + (A-B)^2$$

$$C^2 = 2 \cdot A \cdot B + (A-B)^2$$

$$C^2 = 2AB + A^2 - 2AB + B^2$$

$$C^2 = A^2 + B^2$$