Fernanda Cardona
Sala 109 – Bloco A – IME-USP
cardona@ime.usp.br

Programa

1. Transformações entre espaços reais; Jacobiano.
2. Integrais duplas e triplas.
3. Mudança de variável em integrais: coordenadas polares, cilíndricas e esféricas.
4. Integrais curvilíneas e de superfície.
5. Teoremas de Green, Gauss e Stokes.
6. Interpretações físicas do gradiente, divergente e rotacional.
7. Campos conservativos. Aplicações: Lei de indução de Faraday, Equação da Continuidade em fluídos.

Bibliografia

- J. Bouchara, V. Carrara, A. Hellmeister e R. Salvitti, CÁLCULO INTEGRAL AVANÇADO, 1a. ed., EDUSP, 1997.
- W. Kaplan, CÁLCULO AVANÇADO, volume I, Edgard Blücher, 1972.
- Stewart, CÁLCULO, volume II, Editora Pioneira-Thomson Leaming.
- H. L. Guidorizzi, UM CURSO DE CÁLCULO, volume III. Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro.

Datas das Provas

- P_1: 29/03
- P_2: 10/05
- P_3: 21/06
- PSub: 28/06

Cálculo da Média do Curso

Média sem PSub:

O aluno que não fizer a PSub terá sua média calculada por

$$M = \frac{2P_1 + 2P_2 + 3P_3}{7} \; .$$

Média com PSub:

A PSub é semi-aberta: ela entrará no computo da média daqueles que comparecerem, **obrigatoriamente**.

$$M = \max \left\{ \frac{2PSub + 2P_2 + 3P_3}{7}, \frac{2P_1 + 2PSub + 3P_3}{7}, \frac{2P_1 + 2P_2 + 3PSub}{7} \right\}$$

Recuperação

Somente os alunos que tiverem média $3 \leq M < 5$ e freqüência $\geq 70\%$ poderão fazê-la.

A prova de Recuperação, PRec, será no dia 19 de julho.

Média da Recuperação

É calculada segundo a fórmula

$$MRec = \frac{M + PRec}{2} \; .$$

Aplicações e Transformações

Neste curso admitimos como conhecidas as funções reais de uma ou mais variáveis, isto é, as aplicações de subconjuntos de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ ou mesmo para $\mathbb{R}^m$, onde $m \in \mathbb{N}^*$, a valores em $\mathbb{R}$, principalmente no que se refere a conceitos de limite, continuidade e diferenciabilidade.

Iremos trabalhar com aplicações com os domínios citados acima, porém assumindo valores em $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Em particular, quando $m = n$ teremos as chamadas transformações do $\mathbb{R}^n$, que serão usadas no cálculo de integrais múltiplas que necessitam mudanças de variáveis.

Aplicações do $\mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}^n$

Exemplo 1

Consideremos as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto $(x_0, y_0, z_0, w_0) \in \mathbb{R}^4$ e tem direção dada pelo vetor $\vec{v} = (a, b, c, d)$,

$$\begin{cases} x(t) &= x_0 + ta \\ y(t) &= y_0 + tb \\ z(t) &= z_0 + tc \\ w(t) &= w_0 + td, \;\; t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Estas equações definem uma aplicação

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ t & \mapsto & f(t) = (x(t), y(t), z(t), w(t)) \end{array}$$

Aplic. do $\mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}^n$, cont.

Exemplo 2

As equações paramétricas do plano que passa pelo ponto $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ e tem direção dada pelos vetores $\overrightarrow{u} = (a, b, c)$ e $\overrightarrow{v} = (d, e, f)$ são

$$\begin{cases} x(t) &= x_0 + a\alpha + d\beta \\ y(t) &= y_0 + b\alpha + e\beta \\ z(t) &= z_0 + c\alpha + f\beta, \ \alpha, \ \beta \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Estas equações definem uma aplicação

$$\begin{array}{rcl} f\colon \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (\alpha, \beta) & \mapsto & f(\alpha, \beta) = (x(\alpha, \beta), y(\alpha, \beta), z(\alpha, \beta)) \end{array}$$

Aplic. do $\mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}^n$, cont.

Exemplo 3 (Projeção Estereográfica)

Considere uma superfície esférica S centrada na origem e de raio 1, e seja P o ponto $(0, 0, 1)$.

A cada ponto $Q \in S$, $Q \neq P$, associamos Q' no plano $0xy$, obtido pela interssecção da reta que passa por $\overline{PQ}$ com o plano $0xy$.

Se $Q = (x, y, z)$ temos, por considerações geométricas, que as coordenadas de $Q' = (x', y')$ são dadas por $x' = \dfrac{x}{1-z}$ e $y' = \dfrac{y}{1-z}$.

Isso define uma função $f\colon (S - P) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ por $f(x, y, z) = (\dfrac{x}{1-z}, \dfrac{y}{1-z})$.

Aplic. do $\mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}^n$, cont.

Exemplo 4

Dados $h, k \in \mathbb{R}$, consideremos a translação dada pela função

$$\begin{array}{rcl} f\colon \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x + h, y + k) \end{array}$$

A aplicação inversa $f^{-1}\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é a função

$$f^{-1}(u, v) = (u - h, v - k) \ .$$

Aplic. do $\mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}^n$, cont.

Exemplo 5

Dado $\theta \in [0, 2\pi]$, uma função rotação de ângulo θ é definida por $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ onde

$$(x, y) \mapsto \ (x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\,\theta, x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta) =$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} .$$

Sua aplicação inversa $f^{-1}\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é dada por

$$f^{-1}(u, v) = (u\cos\theta - v\,\mathrm{sen}\,\theta, u\,\mathrm{sen}\,\theta - v\cos\theta) =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & \mathrm{sen}\,\theta \\ -\mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

Funções componentes

Seja f uma aplicação definida em um subconjunto $D \subset \mathbb{R}^m$, a valores em $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} f\colon D \subset \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \ldots, x_m) &\mapsto f(x_1, \ldots, x_m) = (y_1, \ldots, y_n). \end{aligned}$$

As funções f_i,

$$\begin{aligned} f_i\colon D \subset \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \ldots, x_m) &\mapsto f_i(x_1, \ldots, x_m) = y_i, \ \ i = 1, 2, \ldots, n \end{aligned}$$

são chamadas *funções componentes* de f.

Transformações do $\mathbb{R}^n$

Uma *transformação* do $\mathbb{R}^n$ é uma aplicação $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.
Se as $f_i\colon D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, admitem derivadas parciais, então o *determinante jacobiano* de f, calculado em $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ é por definição o determinante

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^0) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(x^0) & \ldots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(x^0) \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}(x^0) & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2}(x^0) & \ldots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}(x^0) \end{vmatrix}$$

e é denotado por $\dfrac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}(x^0)$ ou por $J_f(x^0)$.

Exercício 6

Calcule o jacobiano das seguintes transformações, no ponto P indicado:

a) $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $f(u, v) = (u + v, u - v)$, $P = (3, 4)$;

b) $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $f(u, v) = (u \cos v, u \operatorname{sen} v)$, $P = (2, \pi/4)$;

c) $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, definida por $f(x, y, z) = (x \cos y, x \operatorname{sen} y, z)$, $P = (4, \pi/3, -1)$;

d) $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, definida por $f(r, \theta, \varphi) = (r \cos\theta \operatorname{sen}\varphi, r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi, r \cos\varphi)$.

Coordenadas Polares

Exemplo 7

Dado um ponto P com coordenadas (x, y) no plano cartesiano, também podemos descrevê-lo utilizando sua distância r à origem do sistema, $r = |\overline{OP}|$ e o ângulo θ, que o segmento $\overrightarrow{OP}$ define a partir do eixo $0x$, tomado no sentido anti-horário. Estas novas coordenadas são conhecidas como *coordenadas polares* do $\mathbb{R}^2$.

A transformação

$$\begin{aligned} f\colon D \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2, \ \ D = [0, +\infty[\times [0, 2\pi[\\ (r, \theta) &\mapsto (x(r, \theta), y(r, \theta)) = (r \cos\theta, r \operatorname{sen}\theta) \end{aligned}$$

fornece a relação entre as coordenadas cartesianas e polares.

Coordenadas Polares, cont.

Como podemos descrever o conjunto determinado por D?

Qual a imagem da faixa descrita por D?

A aplicação é injetora?

Qual é o valor do $J_f(r,\theta)$?

Qual é a imagem do segmento $a \times [0, 2\pi[$, $a > 0$?

Interpretando geometricamente, o que obtemos ao efetuar o produto da matriz $J_f(a,\theta)$ pelo vetor $(0,1)$?

Coordenadas Cilíndricas

Usando as coordenadas polares (r,θ) no plano, podemos determinar a posição de um ponto (x,y,z) do $\mathbb{R}^3$ pelas suas coordenadas cilíndricas (r,θ,z).

A relação entre as coordenadas cartesianas (x,y,z) e as cilíndricas (r,θ,z) é dada pela transformação $f\colon D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, onde $D = [0,+\infty[\times[0,2\pi[\times\mathbb{R}$ e

$$f(r,\theta,z) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, z)\ .$$

Essa transformação é injetora no subconjunto obtido de D excluindo-se todos os pontos com $r = 0$; além disso sua imagem é todo o $\mathbb{R}^3$.

Quanto vale o jacobiano $J_f(r,\theta,z)$?

Coordenadas Esféricas

A posição de um ponto P do $\mathbb{R}^3$ também fica determinada pelos números ρ,φ,θ, onde ρ é o comprimento do vetor $\overrightarrow{OP}$; φ é o ângulo entre o eixo $0z$ e $\overrightarrow{OP}$; e θ é a medida do ângulo, medido no sentido anti-horário, a partir do eixo $0x$ até o vetor projeção de $\overrightarrow{OP}$ no plano $0x$.

A relação entre as coordenadas cartesianas (x,y,z) e as coordenadas esféricas (ρ,φ,θ) é dada pela transformação

$$\begin{aligned} &f\colon D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ \ D = [0,+\infty[\times[0,\pi]\times[0,2\pi[\\ &(\rho,\varphi,\theta) \mapsto (x,y,z) = (x(\rho,\varphi,\theta), y(\rho,\varphi,\theta), z(\rho,\varphi,\theta)) = \\ &\qquad\qquad = (\rho\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta, \rho\cos\varphi)\ . \end{aligned}$$

Essa transformação é injetora no subconjunto obtido de D excluindo-se todos os pontos com $r = 0$, ou $\varphi = 0$, ou $\varphi = \pi$; além disso sua imagem é todo o $\mathbb{R}^3$.

Quanto vale o jacobiano $J_f(\rho,\varphi,\theta)$?