Somas de Riemann

Da mesma forma como já foi feito no curso de Cálculo I com a integral definida, neste curso iremos definir o conceito de integral dupla baseado num conceito mais geométrico; anteriormente, foi usado o conceito de área sob o gráfico, agora lidaremos com volume sob o gráfico.

Começamos com um conjunto limitado, D, do $\mathbb{R}^2$; isto é, contido num retângulo $R = [a, b] \times [c, d]$. Em seguida considerados uma função $f = f(x, y)$ definida em D, contínua e limitada com $f(x, y) \geq 0, \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Somas de Riemann, cont.

Gostaríamos de medir o volume do sólido $S = \{(x, y, z) | (x, y) \in D \text{ e } 0 \leq z \leq f(x, y)\}$.

Dado um retângulo R, seja uma partição de $[a, b]$ e uma partição de $[c, d]$. Consideramos os retângulos R_i, formados pelas retas paralelas aos eixos coordenados que passam por pontos de cada uma das partições. Assim obtemos uma *partição* $\Delta = \{R_1, R_2, \ldots, R_q\}$ de R.

A *norma da partição*, denotada por $|\Delta|$, é o comprimento da maior diagonal entre os retângulos $R_i, \ i = 1, 2, \ldots, q$.

Somas de Riemann, cont.

Para cada retângulo $R_i, \ i = 1, 2, \ldots, q$, consideramos um ponto $(\alpha_i, \beta_i) \in R_i$; denotamos por $A(R_i)$ a área do retângulo R_i e convencionamos que $f(\alpha_i, \beta_i) = 0$, se $(\alpha_i, \beta_i) \notin D$.

O volume do paralelepípedo de base R_i e altura $f(\alpha_i, \beta_i)$ é dado por $f(\alpha_i, \beta_i)A(R_i)$, que é igual a 0 quando $(\alpha_i, \beta_i) \notin D$.

A soma $\sum\limits_{i=1}^{q} f(\alpha_i, \beta_i)A(R_i)$ é uma aproximação do volume de S.
Em geral, se diminuirmos $|\Delta|$ a aproximação melhora. É “natural” definirmos o volume de S como sendo um limite dessas somas, quando $|\Delta| \to 0$.

Somas de Riemann, cont.

Em geral, para $f(x, y)$ definida em D, positiva ou não, contínua ou não, as somas $\sum\limits_{i=1}^{q} f(\alpha_i, \beta_i)A(R_i)$ estão definidas e são chamadas somas de Riemann de f, relativas a partição Δ.

Dizemos que o número real L é o *limite* dessas somas para $|\Delta| \to 0$, se dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, existe $\delta > 0$ tal que

$$\left| L - \sum_{i=1}^{q} f(\alpha_i, \beta_i)A(R_i) \right| < \varepsilon \text{ para qualquer } \Delta \text{ com } |\Delta| < \delta$$

e qualquer escolha de pontos $(\alpha_i, \beta_i) \in R_i$.

Prova-se que, quando existe L, ele é único e não depende da escolha do retângulo R que contém D.

Funções Integráveis

Definição 1

Quando existe o limite L dizemos que f é *integrável* em D e denotamos

$$L = \iint_D f(x,y)\, dxdy \ .$$

É possível provar que, se D é limitado e f é integrável em D, então existe um número real $M > 0$ tal que $|f(x,y)| < M, \ \forall (x,y) \in D$.

Funções Integráveis, cont.

Exemplo 2

Seja D o retângulo $[1,3] \times [2,5]$ e seja $f(x,y) \equiv C$, C um número real qualquer. Escolhendo R igual a D, temos que a soma de Riemann de f, em relação à uma partição qualquer de R é

$$\sum_{i=1}^{q} f(\alpha_i, \beta_i) A(R_i) = \sum_{i=1}^{q} CA(R_i) = CA(D) = 6C.$$

Nesse caso, f é integrável em D e $\displaystyle\iint_D f(\alpha_i, \beta_i)\, dx\, dy = 6C$.

Funções Integráveis, cont.

Exemplo 3

Seja D o retângulo $[0,1] \times [0,1]$ e seja $f(x,y) = x, \ \forall (x,y) \in D$. Escolhendo, novamente, R igual a D, consideramos a partição $\Delta_q = \{R_{ij}\}$ de R, obtida da partição $0 < \dfrac{1}{q} < \dfrac{2}{q} < \cdots < \dfrac{q-1}{q} < 1$ de $[0,1]$:

$$R_{ij} = \left[\frac{i-1}{q}, \frac{i}{q}\right] \times \left[\frac{j-1}{q}, \frac{j}{q}\right], \ i,j = 1,2,\ldots,q \ .$$

Funções Integráveis, cont.

A soma de Riemann de f, relativa a Δ_q, com a escolha $(\alpha_i, \beta_i) = (\frac{i}{q}, \frac{j}{q}) \in R_{ij}$, tem q^2 parcelas, e como $A(R_{ij}) = \frac{1}{q^2}$, essa soma é igual a:

$$S_q = \sum_{j=1}^{q}\sum_{i=1}^{q} f(\alpha_i, \beta_i) A(R_{ij}) = \sum_{j=1}^{q}\sum_{i=1}^{q} \frac{i}{q}\frac{1}{q^2} =$$

$$= \sum_{j=1}^{q} \frac{1}{q^3}(1 + 2 + \cdots + q) = \sum_{j=1}^{q} \frac{1}{q^3}\frac{q(q+1)}{2} = \sum_{j=1}^{q} \frac{q+1}{2q^2} =$$

$$= q\frac{q+1}{2q^2} = \frac{q+1}{2q} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2q} \ ;$$

logo, $\displaystyle\lim_{q \to +\infty} S_q = \frac{1}{2}$.

Funções Integráveis, cont.

Nesse cálculo não consideramos todas as partições possíveis e fixamos uma escolha de pontos nos retângulos. Mais a frente veremos que f é integrável em D e então esse limite deve ser a integral de f em D, isto é

$$\iint_D x\, dxdy = \frac{1}{2}\ .$$

Observação

Quando $f \geq 0$ em D, a $\iint_D f(x,y)\, dxdy$, quando existe, é igual ao "volume" do sólido S, mencionado no início. No Exemplo 2, temos $\iint_D C\, dxdy = 6C$ que, no caso $C > 0$, é o volume do paralelepípedo $[1,3] \times [2,5] \times [0,C]$.

Funções Integráveis, cont.

Para efetuar os cálculos de integrais duplas as seguintes propriedades são muito úteis:

Teorema 4

Se $D \subset \mathbb{R}^2$ é um subconjunto limitado, e f e g são funções integráveis em D, então $f+g$ e cf, $c \in \mathbb{R}$ são integráveis em D e vale

$$\iint_D (f+g)(x,y)\, dxdy = \iint_D f(x,y)\, dxdy + \iint_D g(x,y)\, dxdy$$

$$\iint_D (cf)(x,y)\, dxdy = c \iint_D f(x,y)\, dxdy\ .$$

Além disso, se $f(x,y) \leq g(x,y)$, $\forall (x,y) \in D$ então

$$\iint_D f(x,y)\, dxdy \leq \iint_D g(x,y)\, dxdy\ .$$

Funções Integráveis, cont.

Exemplo 5

Calcular $\iint_D (3-5x)\, dxdy$, sendo $D = [0,1] \times [0,1]$.

Do exemplo 2 sabemos que $\iint_D 3\, dxdy = 3A(D) = 3$ e do exemplo 3 temos que $\iint_D x\, dxdy = 1/2$. Pelo teorema anterior:

$$\iint_D 3 - 5x\, dxdy = \iint_D 3\, dxdy - 5 \iint_D x\, dxdy = 3 - 5\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\ .$$

Domínios de Integração

Seja D um subconjunto limitado do $\mathbb{R}^2$, e $S = \{(x,y,z) | (x,y) \in D \text{ e } 0 \leq z \leq 1\}$, ou seja, S é um cilindro de base D e altura 1. É natural esperar que a "àrea" de D seja igual ao volume de S. A observação 9 sugere que a área de D deveria ser definida como $\iint_D 1\, dxdy$, desde que essa integral exista. Não nos interessam domínios de integração para os quais a integral de uma função constante (ou mesmo de uma função contínua) não exista. Queremos trabalhar com domínios para os quais seja possível definir área.

Domínios de Integração, cont.

Vejamos um exemplo de um conjunto onde a função constante não é integrável:

Exemplo 6

Seja $D = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] | x, y \in \mathbb{Q}\}$. Seja f definida em D, dada por $f(x, y) \equiv 1$.
Para qualquer partição $R_1, R_2, \ldots, R_q$ de D podemos escolher pontos $(\alpha_i, \beta_i) \in R_i$ de maneira a obter $\sum_{i-1}^{q} f(\alpha_i, \beta_i)\, A(R_i) = 0$ ou $\sum_{i-1}^{q} f(\alpha_i, \beta_i)\, A(R_i) = 1$.
Como não é possível encontrar um número real L para o qual exista o limite da soma de Riemann, temos, pela definição, que f não é integrável em D.

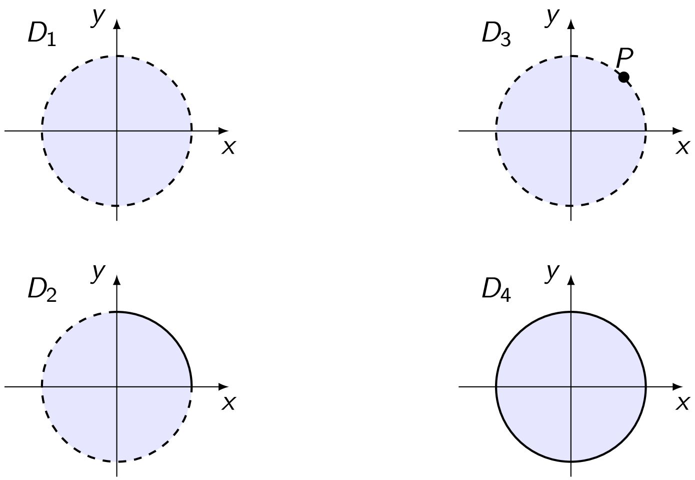
Domínios de Integração, cont.

Definição 7

Dado um subconjunto D de $\mathbb{R}^2$, dizemos que um ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ é um *ponto de fronteira* de D se qualquer retângulo centrado em (x, y) contém pontos de D e de seu complementar. O conjunto de todos os pontos de fronteira de D é chamado *fronteira* de D, denotado ∂D. Um ponto (x, y) diz-se *ponto interior* de D se $(x, y) \in (D - \partial D)$. O conjunto de todos os pontos interiores de D chama-se *interior* de D e denota-se $\mathring{D}$. O conjunto D é *fechado* se $D = \mathring{D} \cup \partial D$.

Domínios de Integração, cont.

Observe que para qualquer i, $\partial D_i = S^1$ e $\mathring{D}_i = B_1(0, 0)$.



Domínios de Integração, cont.

Observe que o conjunto D do exemplo 6 tem *todos os seus pontos na fronteira*. Nesse caso, qualquer reunião finita de retângulos que cobre ∂D tem área maior ou igual a 1.
Para que as escolhas dos pontos nos retângulos não interfiram na existência do limite das somas de Riemann, é necessário que possamos cobrir ∂D com um número finito de retângulos com soma de áreas tão pequena quanto se queira.

Domínios de Integração, cont.

Definição 8

Um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ diz-se de *conteúdo nulo* se, dado $\varepsilon > 0$ arbitário, existem retângulos $R_1, R_2, \ldots, R_q$ de lados paralelos aos eixos coordenados tais que

$$A \subset \cup_{i-1}^{q} R_i \text{ e } \sum_{i=1}^{q} A(R_1) < \varepsilon \ .$$

Teorema 9

Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ limitado.
Então existe $\iint_D 1\, dxdy$ se, e somente se, ∂D tem conteúdo nulo.

Domínios de Integração, cont.

Observação

1. Subconjuntos finitos do $\mathbb{R}^2$ tem conteúdo nulo.
2. União finita de conjuntos de conteúdo nulo, tem conteúdo nulo.
3. Um retângulo, ou um disco, não tem conteúdo nulo.

Observação

O fronteira do conjunto D do exemplo 6 não tem conteúdo nulo.

Domínios de Integração, cont.

Definição 10

Se $D \subset \mathbb{R}^2$ é um subconjunto limitado, dizemos que D tem *área* se existe $\iint_D 1\, dxdy$. Neste caso, definimos

$$A(D) = \iint_D 1\, dxdy \ .$$

Teorema 11

Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ limitado e com área. Se D tem área zero, então tem conteúdo nulo.

Domínios de Integração, cont.

O resultado a seguir será muito útil para decidirmos se um conjunto tem fronteira com conteúdo nulo.

Teorema 12

Se $h\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe $\mathcal{C}^1$, então seu gráfico é um subconjunto do $\mathbb{R}^2$ que tem conteúdo nulo.

Observamos que o teorema acima é verdadeiro para funções $h\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ apenas contínuas. [O teorema foi enunciado dessa maneira pois a demonstração no caso $\mathcal{C}^1$ é mais fácil, uma vez que se utiliza do teorema de Weirstrass e do teorema do valor médio.]