Funções Integráveis

Teorema 1

Seja $D \in \mathbb{R}^2$ um subconjunto limitado e com área, e seja $f = f(x, y)$ uma função contínua num retângulo que contém D. Então f é integrável em D.

Para facilitar o cálculo das integrais duplas podemos recorrer ao teorema que se segue

Teorema 2

Seja $D \in \mathbb{R}^2$ um subconjunto limitado e com área, e sejam D_1 e D_2 subconjuntos do $\mathbb{R}^2$, com área, tais que $D = D_1 \cup D_2$ e $D_1 \cap D_2$ tem área nula. Então, se f é integrável em D, também será integrável em D_1 e D_2, e vale

$$\iint_D f(x, y)\, dxdy = \iint_{D_1} f(x, y)\, dxdy + \iint_{D_2} f(x, y)\, dxdy \ .$$

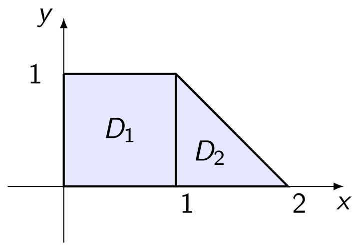
Exemplo 3

Seja $D = D_1 \cup D_2$, onde $D_1 = [0, 1] \times [0, 1]$

e $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 \leq x \leq 2 \text{ e } 0 \leq y \leq 2 - x\}$.

Seja $f(x, y) = -3,\ \forall (x, y) \in D$.

É possível calcular $\displaystyle\iint_D f(x, y)\, dxdy$?



Estimativa de valor da integral

Teorema 4

Seja $D \in \mathbb{R}^2$ um subconjunto limitado e com área $A(D)$. Se $f = f(x, y)$ é uma função integrável em D, e se m e M são números reais satisfazendo

$$m \leq f(x, y) \leq M,\ \forall (x, y) \in D \ ,$$

então

$$m\, A(D) \leq \iint_D f(x, y)\, dxdy \leq M\, A(D) \ .$$

Exemplo 5

Sejam $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}$

e $f(x, y) = 3x^2 + 2y^2 + y^3/9$.

Estime o valor de $\displaystyle\iint_D f(x, y)\, dxdy$.

Teorema do Valor Médio para a integral dupla

Teorema 6 (TVM)

Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ limitado, com área $A(D)$ e tal que $\mathring{D}$ é conexo. Se $f = f(x, y)$ é uma função contínua em D, então existe $(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathring{D}$ tal que

$$\iint_D f(x, y)\, dxdy = f(\overline{x}, \overline{y})\, A(D)\ .$$

O teorema nos permite afirmar que, sob determinadas condições, existe um par $(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathring{D}$ tal que o cilindro de altura $f(\overline{x}, \overline{y})$ e base D tem o mesmo volume que o sólido S limitado por D e pelo gráfico de f.

Observações

- Se $D \in \mathbb{R}^2$ é um subconjunto de área zero e $f(x, y)$ é uma função qualquer, limitada, então f é integrável em D e $\iint_D f(x, y)\, dxdy = 0$. [Dica: use estimativa.]
- Se D é um conjunto com área e $D_1 \subset D$ com $A(D_1) = 0$, então $D - D_1$ tem área e $A(D - D_1) = A(D)$. [Dica: calcule a área de $D - D_1$.]

Alguns teoremas úteis

Teorema 7

Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ limitado, com área. Seja $f = f(x, y)$ uma função limitada em D. Se f é contínua, exceto num conjunto de área zero, então f é integrável em D.

Teorema 8

Sejam f e g funções integráveis em um conjunto D, onde $D \subset \mathbb{R}^2$ é limitado e com área. Se o conjunto

$$\{(x, y) \in D \mid f(x, y) \neq g(x, y)\}$$

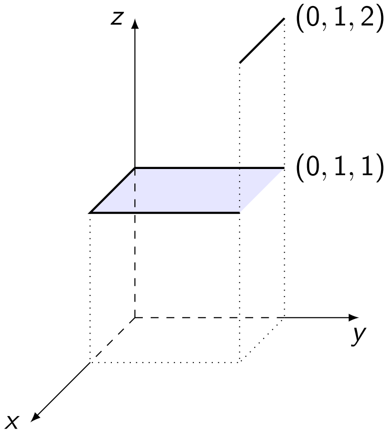
tem área zero, então

$$\iint_D f(x, y)\, dxdy = \iint_D g(x, y)\, dxdy\ .$$

Exemplo 9

Calcule a $\iint_D f(x, y)\, dxdy$ onde $D = [0, 1] \times [0, 1]$ e

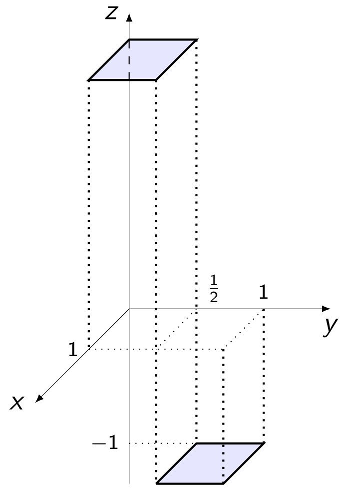
$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } y \neq 1 \\ 2, & \text{se } y = 1 \end{cases}$$



Exemplo 10

Calcule a $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ onde $D=[0,1]\times[0,1]$ e

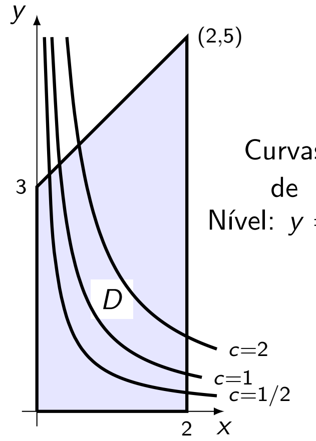
$$f(x,y)=\begin{cases} 2, & \text{se } y\le 1/2 \\ -1, & \text{se } y>1/2 \end{cases}$$



Exercícios

Exercício 11

Determine o valor máximo e mínimo que a integral $\iint_D xy\,dxdy$ pode assumir, sendo D a região limitada pelas retas $x=0$, $y=0$, $x=2$ e $y=x+3$.



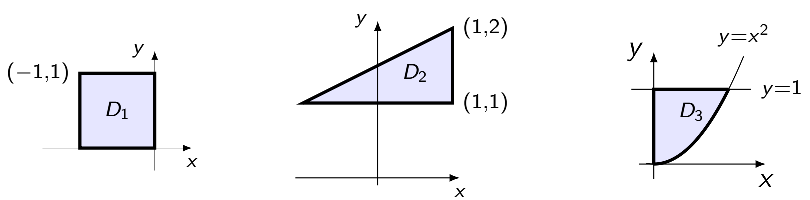
Curvas de Nível: $y=\frac{c}{x}$

Exercício 12

Sejam $D_1=[-1,0]\times[1,0]$; D_2 o triângulo de vértices $(-1,1)$, $(1,1)$ e $(1,2)$; D_3 a região limitada pelas retas $x=0$, $y=1$ e pelo arco de parábola $y=x^2$. Sabendo-se que

$$\iint_{D_1} x\,dxdy=-\frac{1}{2},\quad \iint_{D_2} x\,dxdy=\frac{1}{3} \text{ e } \iint_{D_3} x\,dxdy=\frac{1}{4},$$

calcule $\iint_D x\,dxdy$, onde $D=D_1\cup D_2\cup D_3$.



Exercícios, cont.

Exercício 13

Seja $D=D_1\cup D_2\cup D_3$ o subconjunto do $\mathbb{R}^2$ do exercício anterior.
Seja $f=f(x,y)$ definida em D por:

$f(x,y)=x$, se (x,y) é ponto interior de D_1, D_2 ou D_3.
$f(x,y)=1$, se (x,y) é ponto da fronteira de D_2.
$f(x,y)=2$, se (x,y) é ponto do arco de parábola contido na fronteira de D_3.
$f(x,y)=0$, se (x,y) não está nas condições anteriores.

Calcule $\iint_D f(x,y)\,dxdy$.

Integrais Iteradas

Vamos lançar mão de um raciocínio já utilizado no cálculo I.
Seja $f: R = [a, b] \times [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e positiva.
Seja $f_x: [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f_x(y) = f(x, y)$.
Então a área, $A(x)$, da secção plana abaixo do gráfico de f e acima do plano $0xy$, com x fixado, será

$$A(x) = \int_c^d f_x(y)\, dy = \int_c^d f(x, y)\, dy \ .$$

O Princípio de Cavalieri (mais uma vez) garante que o volume do sólido $S = \{(x, y, z) \,|\, (x, y) \in D \text{ e } 0 \leq z \leq f(x, y)\}$ é igual a

$$\int_a^b A(x)\, dx = \int_a^b \Big(\int_c^d f(x, y)\, dy\Big)\, dx \ .$$

Integrais Iteradas, cont.

Pelas nossas discussões anteriores, esse volume também é igual a $\displaystyle\iint_R f(x, y)\, dxdy$.
Logo, teríamos

$$\iint_R f(x, y)\, dxdy = \int_a^b \Big(\int_c^d f(x, y)\, dy\Big)\, dx \ .$$

Ou seja, para calcular a integral dupla, primeiramente calculamos a integral simples de f em relação a y (mantendo x fixo) de c até d, e depois integramos a função resultante $A(x) = \displaystyle\int_c^d f(x, y)\, dy$ em relação a x, de a até b.

Integrais Iteradas, cont.

O mesmo argumento, com as variáveis trocadas, nos permitiria concluir que

$$\iint_R f(x, y)\, dxdy = \int_c^d B(y)\, dy \ ,$$

onde $B(y) = \displaystyle\int_a^b f(x, y)\, dx$.

As integrais $\displaystyle\int_a^b \Big(\int_c^d f(x, y)\, dy\Big)\, dx$ e $\displaystyle\int_c^d \Big(\int_a^b f(x, y)\, dx\Big)\, dy$ são chamdas *integrais iteradas* de f em R.

Teorema de Fubini

Teorema 14 (Fubini para Retângulos)

Seja $R = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$, e $f = f(x, y)$ uma função integrável em R. Se, para cada $y \in [c, d]$ existe a integral $\displaystyle\int_a^b f(x, y)\, dx = G(y)$, então existe a integral $\displaystyle\int_c^d G(y)\, dy$ e

$$\iint_R f(x, y)\, dxdy = \int_c^d G(y)\, dy = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dxdy \ .$$

Se, para cada $x \in [a, b]$ existe a integral $\displaystyle\int_c^d f(x, y)\, dy = F(x)$, então existe a integral $\displaystyle\int_a^b F(x)\, dx$ e

$$\iint_R f(x, y)\, dxdy = \int_a^b F(x)\, dx = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dydx \ .$$

Exemplo 15
Calcule $\displaystyle\iint_R x\, e^{x^2+y}\, dxdy$, sendo $R = [0,1] \times [-1,1]$.

Exemplo 16
Calcule $\displaystyle\iint_R y\, e^{xy}\, dxdy$, sendo $R = [1,2] \times [1,2]$.

Exemplo 17
Calcule $\displaystyle\iint_R x \operatorname{sen}(x^2 + y)\, dxdy$, $R = [-\pi, \pi/2] \times [\pi/3, \pi/2]$.

Teorema de Fubini — Versão mais geral

Teorema 18
Sejam $p, q\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *funções contínuas com* $p(x) \le q(x)$, *para todo* $x \in [a,b]$.
Seja $D \subset \mathbb{R}^2$, $D = \{(x,y) \mid a \le x \le b \text{ e } p(x) \le y \le q(x)\}$.
Se $f = f(x,y)$ *é uma função integrável em* D *e existe a integral* $\displaystyle\int_{p(x)}^{q(x)} f(x,y)\, dy$ *para todo* $x \in [a,b]$, *então existe a integral* $\displaystyle\int_a^b \int_{p(x)}^{q(x)} f(x,y)\, dydx$ *e vale*

$$\iint_D f(x,y)\, dxdy = \int_a^b \int_{p(x)}^{q(x)} f(x,y)\, dydx\ .$$

Observação

O teorema anterior vale quando trocamos x por y:
Neste caso $D = \{(x,y) \mid c \le y \le d \text{ e } r(y) \le x \le s(y)\}$, onde $r, s\colon [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas com $r(y) \le s(y)$, para todo $y \in [c,d]$.
Consideramos a existência da integral $\displaystyle\int_{r(y)}^{s(y)} f(x,y)\, dx$ para todo $y \in [c,d]$ e obtemos

$$\iint_D f(x,y)\, dxdy = \int_c^d \int_{r(y)}^{s(y)} f(x,y)\, dxdy\ .$$

Exemplos

Exemplo 19
Calcular $\displaystyle\iint_D x^2 + xy\, dxdy$, sendo

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1 \text{ e } x^3 \le y \le x^2\}\ .$$

Exemplo 20
Calcule $\displaystyle\iint_D y\, dxdy$, sendo D a metade inferior do disco centrado na origem e de raio 2.