Um dos métodos usados para resolver integrais de funções de uma variável foi o método da substituição ou de mudança de variáveis, usando a fórmula

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(g(u))g'(u)\,du \ ,$$

onde g é uma função com derivada contínua em um intervalo I que contém c e d, e onde c e d são tais que $g(c) = a$ e $g(d) = b$.
Além disso, supomos f contínua na imagem de g.
Para as integrais duplas teremos uma fórmula análoga.

Mudança de Variáveis na Integral Dupla

Uma *mudança de variáveis* num subconjunto do $\mathbb{R}^2$ é dada por uma transformação

$$\begin{aligned} \varphi\colon D_{uv} \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u,v) &\longrightarrow (x,y) = (x(u,v), y(u,v)) \ . \end{aligned}$$

Como vamos trabalhar com domínios de integração, consideramos D_{uv} subconjunto limitado e com área. Vamos supor também que $\varphi \in \mathcal{C}^1$ é injetora.
Nosso trabalho agora é descobrir quem vai desempenhar o mesmo papel que a derivada g' tem no cálculo da integral.

Mudança de Variáveis, cont.

Se $R_1, R_2, \ldots, R_q$ é uma partição de um retângulo que contém D_{uv} e $S_i = \varphi(R_i),\ i = 1, 2, \ldots, q$, sejam γ_1^i e γ_2^i as imagens por φ dos lados de R_i, que passam por $(u_i, v_i),\ i = 1, 2, \ldots, q$.
Podemos parametrizar as curvas γ_1^i e γ_2^i por

$$\begin{aligned} \gamma_1^i &= \varphi(u, v_i) = (x(u, v_i), y(u, v_i)),\ u \in [u_i, u_i + \Delta^i u] \\ \gamma_2^i &= \varphi(u_i, v) = (x(u_i, v), y(u_i, v)),\ v \in [v_i, v_i + \Delta^i v] \end{aligned}$$

Assim, o vetor tangente a γ_1^i em (x_i, y_i) é
$T_1 = \left(\dfrac{\partial x}{\partial u}(u_i, v_i), \dfrac{\partial y}{\partial u}(u_i, v_i)\right)$ e o vetor tangente a γ_2^i em (x_i, y_i) é
$T_2 = \left(\dfrac{\partial x}{\partial v}(u_i, v_i), \dfrac{\partial y}{\partial v}(u_i, v_i)\right)$.

Mudança de Variáveis, cont.

Seja P_i o paralelogramo formado pelos vetores $T_1\Delta^i u$ e $T_2\Delta^i v$.
Sabemos que sua área, $A(P_i)$, é dada por

$$A(P_i) = |T_1 \wedge T_2|\Delta^i u \Delta^i v = \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{matrix} \right\| (u_i, v_i)\Delta^i u \Delta^i v =$$

$$= |J(\varphi)(u_i, v_i)|\Delta^i u \Delta^i v = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u_i, v_i) \right| A(R_i), \quad i = 1, 2, \ldots q \ .$$

Podemos esperar que a área de P_i seja uma boa aproximação para a área de S_i, sob condições adequadas.

Mudança de Variáveis, cont.

Se $f = f(x, y)$ é uma função contínua em $D_{xy} = \varphi(D_{uv})$, temos

$$\sum_{i=1}^{q} f(x_i, y_i)A(S_i) \cong \sum_{i=1}^{q} f(x(u_i, v_i), y(u_i, v_i))|J(\varphi)(u_i, v_i)|A(R_i) \ .$$

Como a definição da integral dupla se dá por meio de somas de Riemann, isso nos leva a

$$\iint_{D_{xy}} f(x, y)\, dxdy =$$

$$= \iint_{D_{uv}} f(x(u, v), y(u, v))|J(\varphi)(u, v)|\, dudv \ .$$

Temos o seguinte teorema

Mudança de Variáveis, cont.

Teorema 1

Seja $D_{uv} \subset \mathbb{R}^2$ limitado e com área e $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um aberto que contém $D_{uv} \cup \partial D_{uv}$. Seja $\varphi\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi(u, v) = (x, y) = (x(u, v), y(u, v))$ uma transformação de classe $\mathcal{C}^1$ em Ω, injetora no interior de D_{uv} e com $|J(\varphi)(u, v)| \neq 0$ para todo (u, v) no interior de D_{uv}. Nessas condições, se $f = f(x, y)$ é contínua em $D_{xy} = \varphi(D_{uv})$, temos

$$\iint_{D_{xy}} f(x, y)\, dxdy =$$

$$= \iint_{D_{uv}} f(x(u, v), y(u, v))|J(\varphi)(u, v)|\, dudv \ .$$

Exemplo 2

Calcule as integrais abaixo, usando uma mudança de coordenadas conveniente.

1. $\displaystyle\iint_D (x-y)^2 \operatorname{sen}(x+y)\, dxdy$, sendo D o paralelogramo de vértices $(\pi, 0)$, $(2\pi, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$ e $(0, \pi)$.
2. $\displaystyle\iint_D \frac{y}{x^2} \ln(x+y)\, dxdy$, sendo D a região limitada pelas retas $x + y = 1$, $x + y = 2$, $x = y$ e $y = 0$.
3. $\displaystyle\iint_D e^{x^2+y^2}\, dxdy$, onde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9 \text{ e } -x \leq y \leq x\}$.
4. $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy$, onde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x-2)^2 + y^2 \leq 4 \text{ e } y \geq 0\}$.

Massa

Se $D \subset \mathbb{R}^2$ é um subconjunto limitado e com área e a função contínua $\rho\colon D \longrightarrow \mathbb{R},\ \rho = \rho(x, y)$, representa a densidade superficial de massa, então a soma $\displaystyle\sum_{i=1}^{q} \widetilde{\rho}(\alpha_i, \beta_i)A(R_i)$ é uma aproximação da massa de D, onde

$$\widetilde{\rho}(x, y) = \begin{cases} \rho(x, y), & \text{se } (x, y) \in D \\ 0, & \text{se } (x, y) \notin D \end{cases} ,$$

R_i são retângulos de uma partição de algum retângulo que contém D e $(\alpha_i, \beta_i) \in R_i$ é uma escolha de pontos.
Da definição de integral dupla, é razoável definir a massa de D por

$$m(D) = \iint_D \rho(x, y)\, dxdy \ .$$

Exemplo 3

Calcule as massas das regiões D com as densidades de massa $\rho(x, y)$ dadas.

1. D limitada por $y = 0$ e $y = \sqrt{a^2 - x^2}$; $\rho(x, y) = 3y$.
2. D limitada por $y = x^2$ e $y = x + 2$; $\rho(x, y) = x^2 y$.

Centro de Massa

Os momentos de massa, em relação aos eixos $0x$ e $0y$, de um sistema finito de partículas $P_i(x_i, y_i)$, cada uma delas com massa m_i, $i = 1, 2, \ldots, q$ são definidos por

$$M_{0x} = \sum_{i=1}^{q} m_i y_i, \quad M_{0y} = \sum_{i=1}^{q} m_i x_i \ .$$

O centro de massa desse sistema é o ponto $(\overline{x}, \overline{y})$, que tem a propriedade de manter os mesmos momentos de massa em relação aos eixos, quando consideramos nesse ponto uma partícula com massa M, igual à de todo o sistema.

Assim, $M\overline{x} = \sum_{i=1}^{q} m_i x_i$ e $M\overline{y} = \sum_{i=1}^{q} m_i y_i$ ou seja,

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{q} m_i x_i}{M} \text{ e } \overline{y} = \frac{\sum_{i=1}^{q} m_i y_i}{M} \ .$$

Centro de Massa, cont.

Se considerarmos uma chapa plana, podemos tratar esse novo problema (não discreto) da mesma forma que fizemos para determinar o cálculo da massa de uma chapa $D \subset \mathbb{R}^2$ a partir de um sistema finito.

Assim, obtemos as coordenadas para o centro de massa $(\overline{x}, \overline{y})$ da chapa:

$$\overline{x} = \frac{\iint_D \rho(x, y)\, x \, dxdy}{M} = \frac{\iint_D \rho(x, y)\, x \, dxdy}{\iint_D \rho(x, y) \, dxdy}$$

e

$$\overline{y} = \frac{\iint_D \rho(x, y)\, y \, dxdy}{M} = \frac{\iint_D \rho(x, y)\, y \, dxdy}{\iint_D \rho(x, y) \, dxdy} \ .$$

Exemplo 4

Determine as coordenadas dos centros de massa das regiões R com as densidades de massa dadas.

1. R é determinada por $x^2 + y^2 \leq a^2$ e a densidade é $\rho(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.
2. R é limitada por um laço da curva $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ e a densidade é constante.
3. R é limitada pela cardióide $r = 2(1 + \operatorname{sen} \theta)$ e a densidade de massa em cada ponto é proporcional à distância do ponto à origem.

Momento de Inércia

Se D é como nas aplicações anteriores e E é um eixo qualquer do $\mathbb{R}^2$, definimos o momento de inércia, I_E, de D em relação ao eixo E por

$$I_E = \iint_D d_E^2(x,y)\rho(x,y)\,dxdy \ ,$$

onde $d_E^2(x,y)$ é a distância do ponto (x,y) ao eixo E.

Momento de Inércia, cont.

Assim teremos o momento de inércia em relação ao eixo $0x$

$$I_{0x} = \iint_D d_{0x}^2(x,y)\rho(x,y)\,dxdy = \iint_D y^2\rho(x,y)\,dxdy \ ,$$

o momento de inércia em relação ao eixo $0y$

$$I_{0y} = \iint_D d_{0y}^2(x,y)\rho(x,y)\,dxdy = \iint_D x^2\rho(x,y)\,dxdy \ ,$$

e o momento de inércia em relação ao eixo $0z$, também conhecido como o momento de inércia polar, com pólo na origem

$$I_{0z} = \iint_D d_{0z}^2(x,y)\rho(x,y)\,dxdy = \iint_D (x^2+y^2)\rho(x,y)\,dxdy \ .$$

Exemplo 5

Calcule o momento de inércia da chapa D cuja densidade pontual de massa é dada, em relação aos três eixos coordenados.

1. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 \leq a^2\}$; $\rho(x,y) = k\sqrt{x^2+y^2}$, $k > 0$.
2. D é limitada por um laço da curva $r^2 = a^2\cos 2\theta$ e a densidade é constante.

Exemplo 6

Calcule o momento de inércia da chapa $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, -1 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq x+2\}$ cuja densidade pontual de massa é constante, em relação ao eixo $y = 4$.