Teorema 1

Sejam $D_{uvw} \subset \mathbb{R}^3$ um subconjunto limitado e com volume, e $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um aberto que contém D_{uvw} e sua fronteira. Seja $\varphi\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma função de classe $\mathcal{C}^1$ em Ω, injetora no interior de D_{uvw} e com $|J(\varphi)(u,v,w)| \neq 0$ para todo (u,v,w) no interior de D_{uvw}. Nessas condições, se $f = f(x,yz)$ é contínua em $D_{xyz} = \varphi(D_{uvw})$ temos

$$\iiint_{D_{xyz}} f(x,y,z)\,dxdydz =$$
$$= \iiint_{D_{uvw}} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\,|J(\varphi)(u,v,w)|\,dudvdw\ ,$$

onde $(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)) = \varphi(u,v,w)$.

Exemplo 2

Calcule $\displaystyle\iiint_W (z^2x^2 + z^2y^2)\,dxdydz$, onde W é o sólido limitado pelo cilindro $x^2+y^2 \leq 1$, o plano $z=0$ e o parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$.

Exemplo 3

Calcule o volume da esfera de raio R e centro na origem.

Exemplo 4

Calcule $\displaystyle\iiint_S z^2\,dxdydz$, onde S é a região interior ao cone $z = \sqrt{x^2+y^2}$, limitada pela esfera $x^2+y^2+(z-1)^2 = 1$.

Exercício 5 (Página 176 do livro Cálculo Integral Avançado)

- 1) a)
- 1) b)
- 1) d)

Aplicações

Seja S um sólido limitado e com volume, com densidade pontual de massa dada por $\rho(x,y,z)$.

Massa de S

$$m(S) = \iiint_S \rho(x,y,z)\,dxdydz\ .$$

Aplicações, cont.

Centro de massa de S

As coordenadas do centro de massa de S, $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$, são dadas por

$$\overline{x} = \frac{\iiint_S x\rho(x,y,z)\,dxdydz}{m(S)}$$

$$\overline{y} = \frac{\iiint_S y\rho(x,y,z)\,dxdydz}{m(S)}$$

$$\overline{z} = \frac{\iiint_S z\rho(x,y,z)\,dxdydz}{m(S)}$$

Aplicações, cont.

Momentos de Inércia

Momento de inércia em relação ao eixo $0x$:

$$I_x = \iiint_S \rho(x,y,z)(y^2+z^2)\,dxdydz$$

Momento de inércia em relação ao eixo $0y$:

$$I_y = \iiint_S \rho(x,y,z)(x^2+z^2)\,dxdydz$$

Momento de inércia em relação ao eixo $0z$:

$$I_z = \iiint_S \rho(x,y,z)(x^2+y^2)\,dxdydz$$