Observação

O site, "Famous Curves Index", cujo link se encontra na página da disciplina (e na nossa página),

http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Curves/Curves.html

contém material sobre diversas curvas clássicas no plano.
Outros endereços interessantes:

http://curvebank.calstatela.edu/home/home.htm

http://www.2dcurves.com/

http://xahlee.info/SpecialPlaneCurves_dir/specialPlaneCurves.html

Observação, cont.

Também deixei o link

https://elepa.files.wordpress.com/2013/11/fifty-famous-curves.pdf

para o trabalho

Fifty Famous Curves,
Lots of Calculus Questions,
And a Few Answers

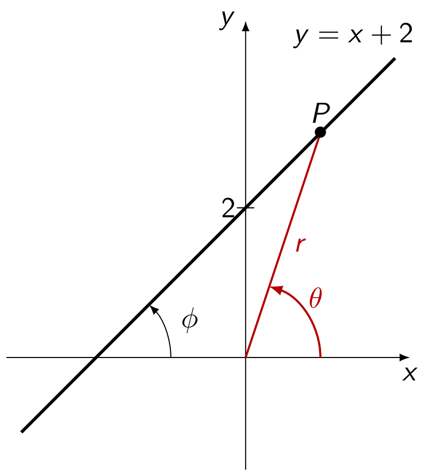
Stephen Kokoska

Reta

Com equação $y = mx + c$ temos a reta com coeficente angular m (valor da tangente do ângulo ϕ, fixo, que a reta forma com o eixo $0x$) e intercepto do eixo $0y$ em $(0, c)$.
Sua equação em coordenadas polares é

$$r = \frac{c}{\operatorname{sen}\theta - m\cos\theta},$$

para $\theta \in]\phi, \phi + \pi[$.



Reta, cont.

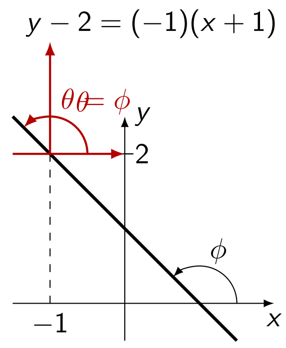
Quando a equação da reta é da forma $y - b = m(x - a)$, sabemos que tem coeficente angular m e passa pelo ponto (a, b).
Vamos tomar as coordenadas polares modificadas

$$\begin{cases} x = a + r\cos\theta \\ y = b + r\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

Nessas novas coordenadas, sua equação é

$$\operatorname{tg}\theta = m$$

para $r \in]-\infty, +\infty[$.



Espiral de Arquimedes

A equação em coordenadas polares

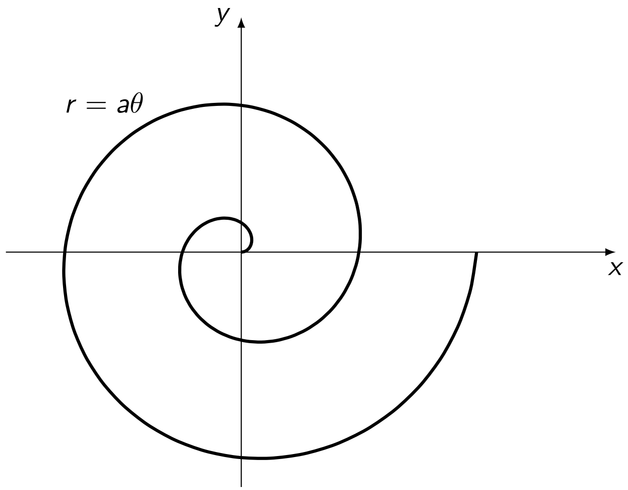
$$r = a\theta,\ \theta \in [0, +\infty[\ ,$$

representa a Espiral de Arquimedes.

(Em coordenadas cartesianas teríamos as equações implícitas $\sqrt{x^2+y^2} = a\,\mathrm{tg}(x/y)$ ou $-\sqrt{x^2+y^2} = a\,\mathrm{tg}(x/y)$, dependendo do quadrante que você está trabalhando. ...)

Espiral de Arquimedes, cont.

Seu gráfico é



Cardióide

A cardióide é a curva que representa o lugar geométrico de um ponto numa circunferência, a qual gira sobre outra circunferência de mesmo raio.

Em coordenadas cartesianas:

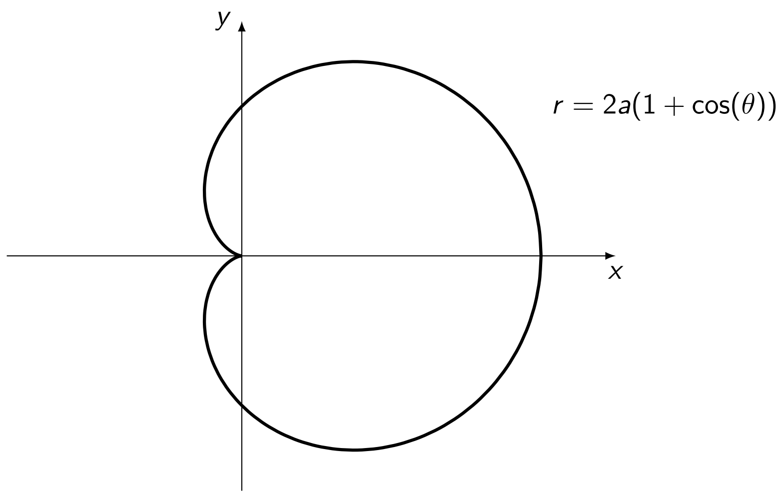
$$(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = 4a^2(x^2 + y^2)\ ,$$

em coordenadas polares:

$$r = 2a(1 + \cos(\theta))\ .$$

Cardióide, cont.

Seu gráfico é



Lemniscata de Bernoulli

A lemniscata é um tipo de "figura 8" (na verdade, "desenho do número 8") que é um caso particular de outra curva famosa: Oval de Cassini. Uma curva é uma oval de Cassini quando representa o lugar geométrico de um ponto P que se move de maneira que o produto de suas distâncias a dois pontos fixos é constante. (Oval de Cassini tem equação $(x^2+y^2)^2 - a^2(x^2-y^2) + a^4 - c^4 = 0$. Leminiscata ocorre quando $a = c$.)

Sua equação cartesiana é:

$$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2) \ ,$$

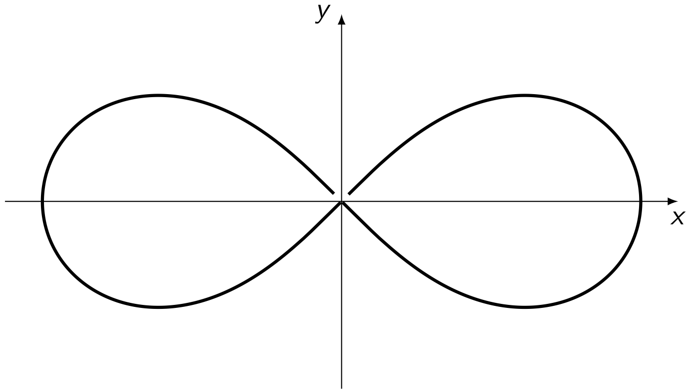
e em coordenadas polares é:

$$r^2 = a^2\cos(2\theta) \ .$$

Lemniscata de Bernoulli, cont.

Seu gráfico é

$$r^2 = a^2\cos(2\theta)$$



Rosácea (Rhodonea)

O nome Rhodonea vem do grego, "Rhodon"=rosa.
Sua equação em coordenadas polares é

$$r = a\,\mathrm{sen}(c\theta) \ .$$

O número de pétalas é o denominador de: $\frac{1}{2} - \frac{1}{2c}$.
Se c é irracional, a curva não fecha e o número de pétalas é infinito. Para c racional, a curva é algébrica. (Uma curva é algébrica se seus pontos são os zeros (as raízes) de um polinômio em duas variáveis.)
Algum autores restringem o valor de c aos naturais.
Nesse caso,

o número de pétalas é

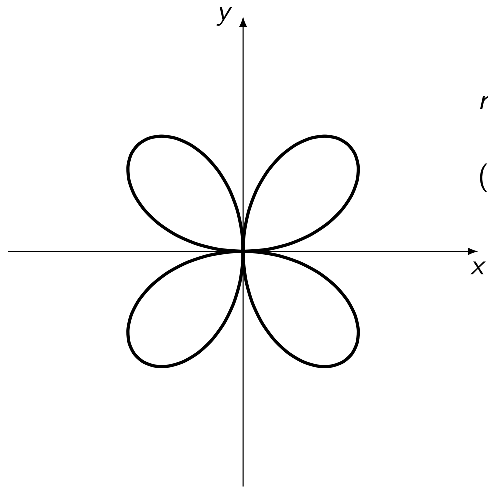
- c, se c é ímpar,
- $2c$, se c é par;

e o grau de sua equação em coordenadas cartesianas é

- $c+1$, se c é ímpar,
- $2(c+1)$, se c é par.

Rosácea, cont.

Seu gráfico é

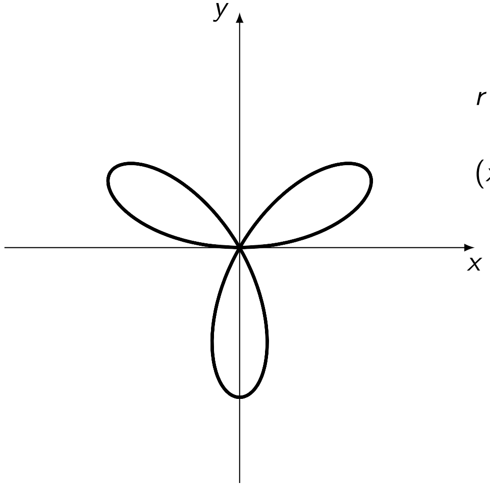


$$r = 2\,\mathrm{sen}(2\theta)$$

$$(x^2+y^2)^3 = 16x^2y^2$$

Rosácea, cont.

Outro exemplo, $a = 2$ e $c = 3$:



$r = 2\,\mathrm{sen}(3\theta)$

$(x^2 + y^2)^2 = 2(x^3 - 3xy^2)$

Algumas curvas de interesse

(Não necessariamente expressas em coordenadas polares)

Catenária

A catenária é de especial interesse para engenheiros. É a equação da curva que se obtém quando a gravidade atua sobre um cabo, perfeitamente flexível, suspenso pelas suas extremidades. (Durante muito tempo pensou-se que era uma parábola, e ainda hoje há quem pense...)

Exemplos:

- "We investigate the 'hanging cable' problem for practical applications. We focus on determining the minimum distance between two vertical poles which will prevent a cable, hanging from the top of these poles, to touch the ground. ... "
  Reference:
  http://euclid.trentu.ca/aejm/V4N1/Chatterjee.V4N1.pdf

Catenária, cont.

- "The catenary curve is applicable to many everyday problems such as kiln construction and minimization of surface areas, and is even seen in the St Louis Arch. A differential equation modeling a hanging chain of either uniform or variable density will procure the catenary curve. This is important in its applications for architecture and and other problems."
  Reference:
  http://home2.fvcc.edu/~dhicketh/DiffEqns/Spring11projects/Torrey_Seward_Kirk_Gordon/1Project/Kirk/%26ToreysDifEQscreen.pdf

Catenária, cont.

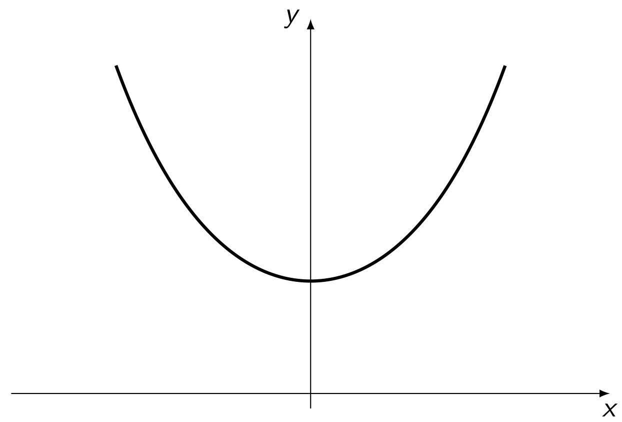
- “Polynomial and catenary equations were fit by least square error methods to the dentitions of seven children with "normal" occlusion. Mean and mean square error were then used to analyze accuracy of curve fits and asymmetries of arches. ...”
  Reference:
  http://jdr.sagepub.com/content/54/6/1124.short

Catenária, cont.

Sua equação cartesiana é

$$y = a\cosh(x/a)$$

Seu gráfico



Curvas de Lissajous

As curvas de Lissajous tem inúmeras aplicações na física, astronomia, e outras ciências. Uma rápida busca na Internet nos revela algumas delas:

- “These figures allow one to compare amplitudes, frequencies and phase between two oscillatory signals for one. For example, if you had two sinusoidal signals of equal amplitude and frequency, you could determine the phase difference by looking at the shape of the trace. If the waves are in phase, you would see a straight line, if the waves are pi/2 out of phase, you would see a circle instead.”
  Reference: https://www.physicsforums.com/threads/lissajous-figures-applications.185771/

Curvas de Lissajous, cont.

- “...analysis method for determining dynamic characteristics of a second order acceleration measurement system with inertial mass, spring and damping, where the Lissajous figures are used to detect the dynamic characteristics of the force balance acceleration sensor, i.e. amplitude response and phase response.”
  Reference:
  http://lxsj.cstam.org.cn/EN/abstract/abstract137432.shtml

Curvas de Lissajous, cont.

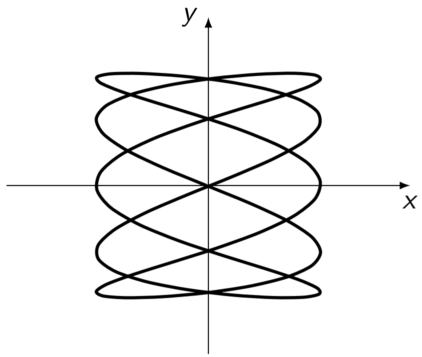
- “Based on Michelson interferometer and phase generated carrier (PGC) homodyne demodulation technique, an optical interferometer system is built, and a novel method using the central angles of Lissajous figures to measure micro-vibration displacement is proposed. ”
  Reference: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0030401808005300

Suas equações paramétricas, em coordenadas cartesianas, são

$$x = a\,\mathrm{sen}(nt + c), \quad y = b\,\mathrm{sen}(t) \; .$$

Curvas de Lissajous, cont.

Seu gráfico para $a = b = c = 1$ e $n = 2.5$



Parábola semi-cúbica de Neile

Quando uma partícula desce, com velocidade inicial diferente de zero, sob efeito da gravidade, seguindo uma parábola de Neile, ela percorre distâncias verticais iguais em intervalos iguais. (Ou seja, tem velocidade vertical constante...) É uma das curvas isócronas. Sua equação cartesiana é:

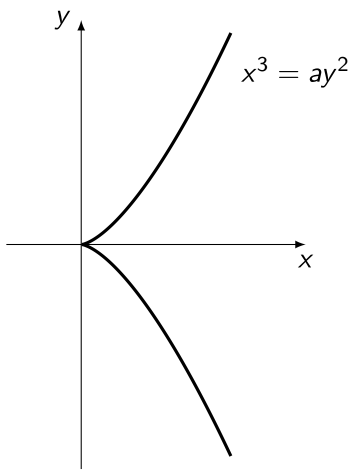
$$x^3 = ay^2 \; ,$$

e a polar:

$$r = a\,\mathrm{sen}^2\theta\,\sec^3\theta \; .$$

Parábola semi-cúbica de Neile, cont.

Seu gráfico



Ciclóide

A outra curva isócrona é a ciclóide. Ela é o lugar geométrico do ponto à uma distância h do centro de uma circunferência de raio a a qual "rola", sem atrito nem deslizamento, sobre uma reta.

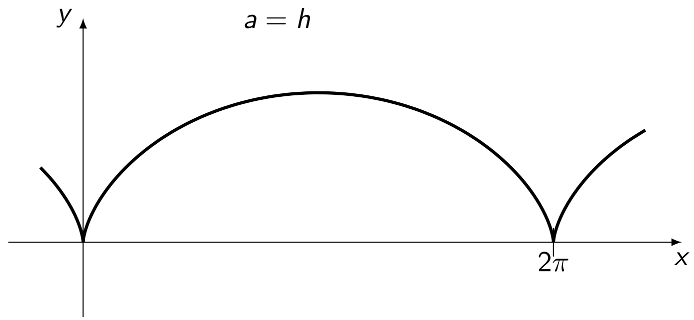
Ela é tautócrona (=isócrona) pois o tempo despendido por um objeto que desliza sobre ela, partindo do repouso, sem fricção, até seu ponto mais baixo, sob ação uniforme da gravidade, é independente do ponto inicial.

Suas equações paramétricas cartesianas são:

$$x = at - h\,\text{sen}\,t, \quad y = a - h\cos t\ .$$

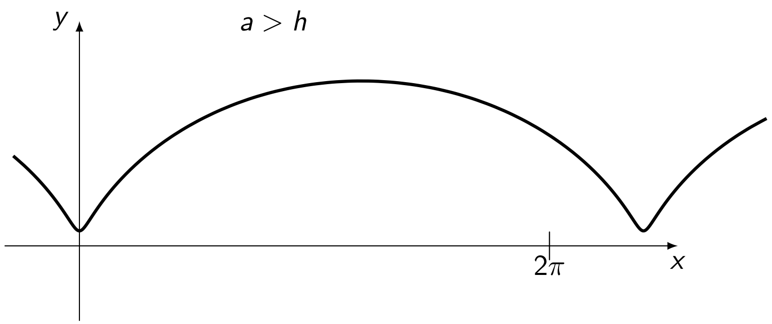
Ciclóide, cont.

Seu gráfico

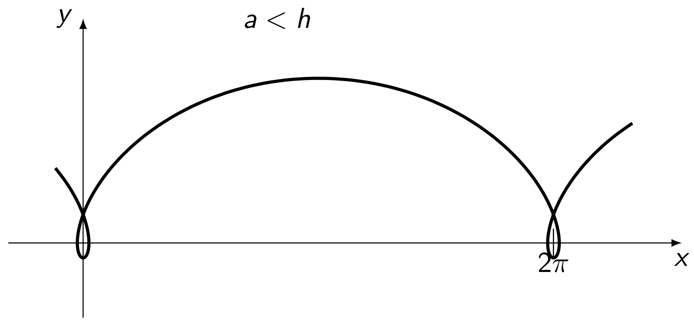


Ciclóide, cont.

Quando $h < a$ ou $h > a$, ela é conhecida como trocóide.



Ciclóide, cont.



Braquistócrona

Uma braquistócrona é a curva de descida mais rápida a um ponto final determinado. Dado um ponto inicial, a tautócrona é a braquistócrona. Dependendo da velocidade inicial do objeto, poderá ser a semi-cúbica ($v_0 \neq 0$) ou a ciclóide ($v_0 = 0$).

Exercício 1

Todos os exercícios são da Lista I.

- 10) a), b)
- 11)
- 14) a), b)
- 19)