Curvas no $\mathbb{R}^3$

Definição 1

Uma *curva em* $\mathbb{R}^3$ é uma função contínua $\gamma\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo, que associa a cada $t \in I$ um ponto $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$.

O conjunto dos pontos $(x(t), y(t), z(t))$, quando t percorre I, é o *traço da curva* γ. Se I é um intervalo fechado $[a, b]$, os pontos $\gamma(a) = (x(a), y(a), z(a))$ e $\gamma(b) = (x(b), y(b), z(b))$ são chamados respectivamente *ponto inicial* e *ponto final* de γ.

Observe que todas as definições feitas nesta secção para curvas no $\mathbb{R}^3$ são adaptáveis às curvas no $\mathbb{R}^2$, bastando para isso suprimir a teceira coordenada.

Diremos que γ é contínua, $\mathcal{C}^k$, $k \in \mathbb{N}$, ou $\mathcal{C}^\infty$, se cada uma das suas funções componentes for $\mathcal{C}^k$, $k \in \mathbb{N}$, ou $\mathcal{C}^\infty$, respectivamente.

Também usamos a notação

$$\gamma\colon \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \qquad t \in I.$$

As equações $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ são as *equações paramétricas* de γ.

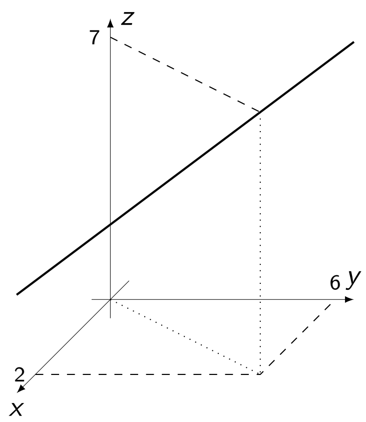
Exemplos

Exemplo 2

A curva

$$\gamma\colon \begin{cases} x(t) = x_0 + at \\ y(t) = y_0 + bt \\ z(t) = z_0 + ct \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R},$$

com $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$, tem como traço a reta que passa pelo ponto (x_0, y_0, z_0), na direção do vetor (a, b, c).



onde $(x_0, y_0, z_0) = (2, 6, 7)$ e $(a, b, c) = (2, 0, 0)$

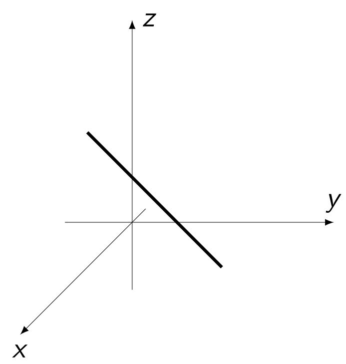
Exemplos, cont.

Exemplo 3

A curva

$$\gamma\colon \begin{cases} x(t) = 2t \\ y(t) = 7t - 1 \\ z(t) = -4t + 3 \end{cases} \qquad t \in [0, 1],$$

representa o segmento de reta de extremidades inicial $(0, -1, 3)$ e final $(2, 6, -1)$.

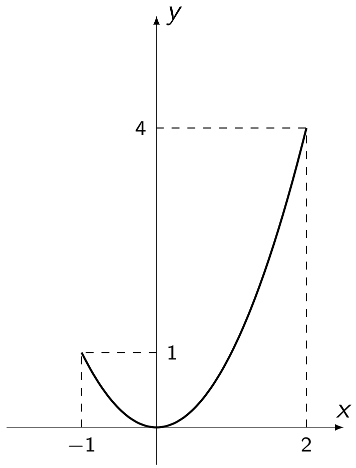


Exemplos, cont.

Exemplo 4

O arco de parábola $y = x^2$, $x \in [-1, 2]$, tem representação paramétrica

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \end{cases} \qquad t \in [-1, 2],$$

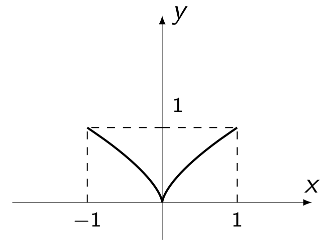


Exemplos, cont.

Exemplo 5

A cúbica $y = \sqrt[3]{x^2}$, $x \in [-1, 1]$, pode ser parametrizada por

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = t^3 \\ y(t) = t^2 \end{cases} \qquad t \in [-1, 1],$$



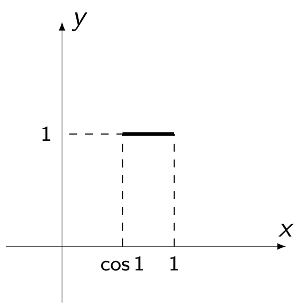
Exemplos, cont.

Exemplo 6

A curva

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = 1 \end{cases} \qquad t \in [-1, 1],$$

tem por traço o segmento de reta que vai de $(\cos(-1), 1)$ a $(1, 1)$, e volta a $(\cos 1, 1)$.



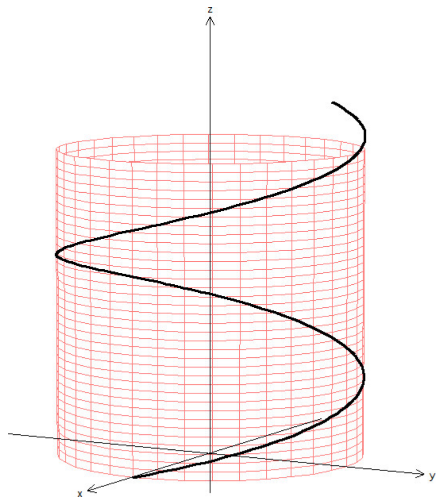
Exemplos, cont.

Exemplo 7

A curva

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = a \cos t \\ y(t) = a \operatorname{sen} t \\ z(t) = bt \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R},$$

é chamada *hélice cilíndrica*, e está "apoiada" no cilindro $x^2 + y^2 = a^2$, pois os pontos de seu traço satisfazem a equação do cilindro.



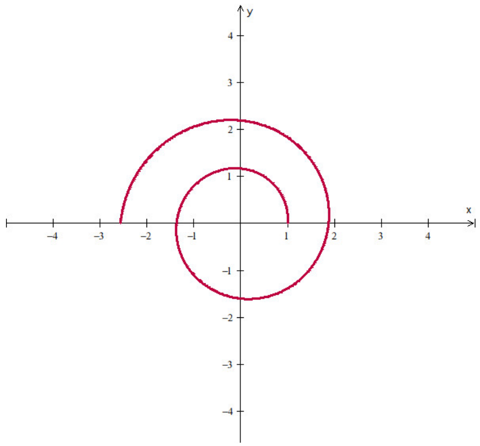
Exemplos, cont.

Exemplo 8

A *espiral logarítmica* é a curva definida em coordenadas polares por

$$\gamma\colon \begin{cases} r = r(t) = e^{bt} \\ \theta = \theta(t) = at \qquad t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

com $a,\ b \neq 0$.



Curva e traço

Curvas diferentes podem ter o mesmo traço. As seguintes curvas representam a mesma circunferência $x^2 + y^2 = 1$,

$$\gamma_1\colon \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \operatorname{sen} t \end{cases} \qquad \gamma_2\colon \begin{cases} x(t) = \operatorname{sen} t \\ y(t) = \cos t \end{cases} \qquad \gamma_3\colon \begin{cases} x(t) = \cos 2t \\ y(t) = \operatorname{sen} 2t \end{cases}$$

para $t \in [0, 2\pi]$.
No entanto, γ_1 e γ_2 tem comprimento 2π, enquanto γ_3 tem comprimento 4π.
Além disso, o ponto inicial de γ_1 e γ_3 é o $(1, 0)$, já o de γ_2 é $(0, 1)$.
Tanto γ_1, quanto γ_3, são percorridas no sentido anti-horário; γ_2 é percorrida no sentido horário.

Curva e traço, cont.

Então, fique atento, *uma curva é uma função*, enquanto *o traço é a imagem* dessa função. Quando não há ambiguidades, não há problema em identificar uma curva e seu traço. Por isso muitas vezes descreveremos uma curva (traço) pela intersecção de duas superfícies.

Exemplos

Exemplo 9

A curva

$$\gamma\colon \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + 4 \\ z = 1 \end{cases}$$

tem seu traço descrito como a intersecção da esfera de centro $(0, 0, 0)$ e raio 2 com o plano horizontal $z = 1$, e pode ser parametrizada por

$$\gamma\colon \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\operatorname{sen} t \qquad t \in [0, 2\pi] \\ z = 1 \end{cases}$$

Exemplos, cont.

Exemplo 10

A intersecção do cilindro $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ com o plano $z = x + y$ pode ser parametrizada como

$$\gamma\colon \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 3\,\text{sen}\, t \\ z = 2\cos t + 3\,\text{sen}\, t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Exemplo 11

Uma equação também pode representar uma curva, como a elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, que pode ser parametrizada

$$\gamma\colon \begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\,\text{sen}\, t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Curvas fechadas e curvas simples

Definição 12

Uma curva $\gamma\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é *fechada* se seus pontos inicial e final coincidem, ie. $\gamma(a) = \gamma(b)$.

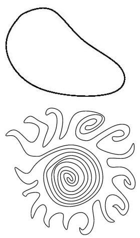
Definição 13

Um ponto P pertencente ao traço da curva $\gamma\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é *ponto múltiplo* de γ, se existem t_1 e $t_2 \in [a, b]$, $t_1 \neq t_2$, $[t_1, t_2] \neq [a, b]$ com $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$.

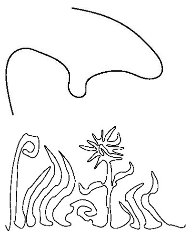
Definição 14

Uma curva γ é uma *curva simples*, se não contêm pontos múltiplos.

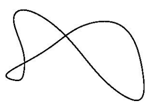
Exemplos



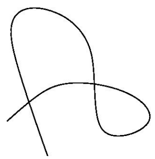
curva fechada simples



curva não-fechada simples



curva fechada não-simples



curva não-fechada não-simples

Exemplos, cont.

Exemplo 15

A curva

$$\gamma\colon \begin{cases} x = (2\cos t + 1)\cos t \\ y = (2\cos t + 1)\,\text{sen}\, t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

admite ponto(s) múltiplo(s)?

Dica

Encontre t tal que $2\cos t + 1 = 0$.

Teorema 16 (Jordan)

Seja $\gamma\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^2$, uma curva contínua, fechada e simples. Então $\mathbb{R}^2 - \operatorname{Im}\gamma = D_1 \cup D_2$, onde D_1 é um subconjunto aberto, conexo e limitado do $\mathbb{R}^2$ e D_2 é um subconjunto aberto, conexo e não-limitado do $\mathbb{R}^2$, $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ e o traço de γ é a fronteira comum de D_1 e D_2.

Definição 17

Seja $\gamma\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^2$, uma curva contínua, fechada e simples. O *interior* de γ é a componente limitada (D_1) da decomposição do $\mathbb{R}^2$ dada pelo teorema de Jordan.

Definição 18

Seja $\gamma\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^3$, uma curva $\mathcal{C}^1$. A *velocidade de γ no instante t* é o vetor $\overrightarrow{v}(t) = x'(t)\overrightarrow{\imath} + y'(t)\overrightarrow{\jmath} + z'(t)\overrightarrow{k}$.

Definição 19

Seja $\gamma\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^3$, uma curva $\mathcal{C}^1$ e $P = \gamma(t_0)$. Se $\gamma'(t_0) \neq \overrightarrow{0}$ (ie., $x'(t_0) + y'(t_0) + z'(t_0) \neq 0$), a *reta tangente a γ em t_0* é a reta que passa por P com direção $\overrightarrow{v}(t_0) = \gamma'(t_0)$.

Como P pertence ao traço de γ dizemos também *reta tangente a γ em P*.

Exemplo

Exemplo 20

Seja

$$\gamma\colon \begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = 2t - 1 \\ z = 3t^2 - t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Em $t_0 = 0$ ela tem vetor posição $\overrightarrow{r}(0) = (1, -1, 0)$ e vetor velocidade $\overrightarrow{v}(0) = (0, 2, -1)$.

A reta tangente no instante $t_0 = 0$ é obtida da equação vetorial $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{r}(t_0) + t\overrightarrow{v}(t_0)$, e assim temos

$$r\colon \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 + 2t \\ z = -t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

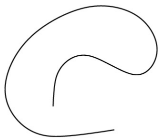
Definição 21

Seja $\gamma\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Diremos que γ é *lisa* se for $\mathcal{C}^1$ em $[a, b]$, $\overrightarrow{v}(t) \neq \overrightarrow{0}$, $\forall t \in]a, b[$; caso seja fechada, $\overrightarrow{v}(a) = \overrightarrow{v}(b) \neq \overrightarrow{0}$.

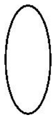
Definição 22

Uma curva $\gamma\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é *lisa por partes* se for possível decompor $[a, b]$ em um número finito de subintervalos, onde γ é lisa.

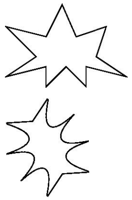
Exemplos



curva
não-fechada lisa



curva
fechada
lisa



curva
fechada não-lisa

curva
não-fechada lisa
por partes

Exemplos, cont.

Exemplo 23

As curvas

$$\gamma_1 : \begin{cases} x = t \\ y = |t| \end{cases} \quad t \in [-1,1] \qquad \gamma_2 : \begin{cases} x = t^3 \\ y = |t^3| \end{cases} \quad t \in [-1,1]$$

são lisas por partes (seu traço é $|x|$).
Não são lisas:
γ_1 não é derivável em $t = 0$;
γ_2 é derivável em $t = 0$, mas apresenta uma mudança brusca de velocidade na vizinhança do 0, pois seu versor velocidade é

$$\frac{\gamma_2'(t)}{|\gamma_2'(t)|} = \begin{cases} \dfrac{\vec{\imath} - \vec{\jmath}}{\sqrt{2}}, & t \in [-1,0] \\ \dfrac{\vec{\imath} + \vec{\jmath}}{\sqrt{2}}, & t \in [0,1] \end{cases}$$

Exemplos, cont.

Exemplo 24

$\gamma\colon [0,3] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$x(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 2 \\ 2, & 2 \leq t < 3 \end{cases}$$

e

$$y(t) = \begin{cases} t/2, & 0 \leq t < 2 \\ t-1, & 2 \leq t < 3 \end{cases}$$

é lisa por partes.