Comprimento de Curvas

Definição 1

Seja

$$\gamma\colon \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

uma curva lisa definida em $[a,b]$. O *comprimento da curva* γ é definido pela integral

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\, dt \\ &= \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt \\ &= \int_a^b |\overrightarrow{v}(t)|\, dt \end{aligned}$$

Exemplo

Para uma curva lisa por partes a definição do comprimento é a mesma, aplicada a cada um dos subintervalos onde a curva é lisa.

Exemplo 2

Para a cúspide

$$\gamma\colon \begin{cases} x(t) = 3t^2 \\ y(t) = 2t^3 \quad -1 \le t \le 1 \end{cases}$$

temos

$$\gamma'\colon \begin{cases} x(t) = 6t \\ y(t) = 6t^2 \quad -1 \le t \le 1 \end{cases}$$

e

$$|\overrightarrow{v}(t)| = \sqrt{36t^2 + 36t^4} = 6|t|\sqrt{1+t^2}$$

Exemplos, cont.

Continuação do Exemplo 2

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_{-1}^{1} 6|t|\sqrt{1+t^2}\, dt \\ &= \int_{-1}^{0} 6(-t)\sqrt{1+t^2}\, dt + \int_0^1 6t\sqrt{1+t^2}\, dt \\ &= -\int_2^1 3\sqrt{u}\, du + \int_1^2 3\sqrt{u}\, du = 6\int_1^2 \sqrt{u}\, du \\ &= 6\,\frac{2}{3}(\sqrt{8}-1)\ . \end{aligned}$$

Introdução

Um campo de forças $\overrightarrow{F}(x,y) = P(x,y)\overrightarrow{\imath} + Q(x,y)\overrightarrow{\jmath}$ é uma grandeza vetorial, que vamos considerar agindo sobre uma partícula que se move segundo uma equação horária $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a,b]$. A força $\overrightarrow{F}$ pode ser vista como a taxa de transferência (de energia) por deslocamento. Ou seja, uma força tem a propriedade de mudar o movimento da partícula.

Diz-se que uma força realiza *trabalho* se, quando agindo num corpo, existe um deslocamento do ponto de aplicação na mesma direção da força. Assim, num dado instante t, a taxa de variação do trabalho em relação ao tempo é medida pelo produto escalar da força e do vetor velocidade (direção) do movimento, no ponto aplicado.

Introdução, cont.

Logo o trabalho será

$$\tau = \int_a^b \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{v}\, dt = \int_a^b \overrightarrow{F} \cdot \frac{d\overrightarrow{r}}{dt}\, dt = \int_\gamma \overrightarrow{F}\, d\overrightarrow{r}$$

A potência é a taxa de variação do trabalho em relação ao tempo.

A potência e o trabalho são grandezas escalares.

Conceitualmente a potência requer uma mudança no universo físico e um intervalo de tempo no qual a mudança ocorre. Já o trabalho é um conceito que somente mede a mudança total no universo físico.

A mesma quantidade de trabalho é necessária para mover uma partícula de um ponto A até um ponto B num certo caminho, independendo se ela se move rapidamente ou devagar. No entanto é necessário mais potência se o movimento tiver de ser rápido.

Definição 3

Seja γ uma curva lisa em $\mathbb{R}^3$,

$$\gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad t \in [a, b].$$

Seja $\overrightarrow{F}$ um campo vetorial contínuo sobre o traço de γ, com expressão em coordenadas

$$\overrightarrow{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\overrightarrow{\imath} + Q(x, y, z)\overrightarrow{\jmath} + R(x, y, z)\overrightarrow{k}\ .$$

cont. Definição

Então a *integral de linha do campo* $\overrightarrow{F}$ *ao longo da curva* γ, que se denota por $\int_\gamma \overrightarrow{F}\, d\overrightarrow{r}$, é definida pela seguinte integral de Riemann

$$\int_\gamma \overrightarrow{F}\, d\overrightarrow{r} = \int_a^b \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t)) \cdot \overrightarrow{v}(t)\, dt =$$

$$= \int_a^b [P(x, y, z)\, x'(t) + Q(x, y, z)\, y'(t) + R(x, y, z)\, z'(t)]\, dt\ ,$$

onde $(x, y, z) = (x(t), y(t), z(t))$.

A integral de linha de um campo sobre uma curva lisa por partes se define da maneira usual: $\int_\gamma \overrightarrow{F}\, d\overrightarrow{r} = \int_{\gamma_1} \overrightarrow{F}\, d\overrightarrow{r} + \int_{\gamma_2} \overrightarrow{F}\, d\overrightarrow{r} + \cdots + \int_{\gamma_k} \overrightarrow{F}\, d\overrightarrow{r}$, onde γ_i é lisa.

Exemplos

Exemplo 4

Seja $\overrightarrow{F}(x, y, z) = x\,\overrightarrow{\imath} + y\,\overrightarrow{\jmath} + z\,\overrightarrow{k}$. Calcule a integral de linha de $\overrightarrow{F}$ ao longo da hélice

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \operatorname{sen} t \\ z(t) = t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

Exemplo 5

Seja $\overrightarrow{F}(x, y) = x^2 y\,\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath}$. Calcule a integral de linha de $\overrightarrow{F}$ ao longo da cúspide

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = 3t^2 \\ y(t) = 2t^3 \end{cases} \quad t \in [-1, 1].$$

Notação

Se $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ e
$\overrightarrow{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\overrightarrow{\imath} + Q(x,y,z)\overrightarrow{\jmath} + R(x,y,z)\overrightarrow{k}$,
denotamos a integral de linha $\overrightarrow{F}$ ao longo de γ por $\int_\gamma \overrightarrow{F}\, d\overrightarrow{r}$.
Lembrando que podemos usar a notação

$$\begin{aligned} dx &= x'(t)dt \\ dy &= y'(t)dt \\ dz &= z'(t)dt \end{aligned}$$

então $d\overrightarrow{r} = dx\overrightarrow{\imath} + dy\overrightarrow{\jmath} + dz\overrightarrow{k}$ e a integral de linha pode ser denotada por

$$\int_\gamma \overrightarrow{F}\, d\overrightarrow{r} = \int_\gamma Pdx + Qdy + Rdz$$

onde entendemos $\overrightarrow{F}\, d\overrightarrow{r}$ como o produto escalar.

Cuidado!

É comum ver alguns estudantes calculando o termo da direita na igualdade

$$\int_\gamma \overrightarrow{F}\, d\overrightarrow{r} = \int_\gamma Pdx + Qdy + Rdz$$

como a integral em x, y e z. Embora a integral de linha sobre segmentos de reta na direção de x, y ou z acabem sendo numericamente iguais, pelo menos naquela direção, isso não funciona para curvas que não são formadas por segmentos de reta. **E conceitualmente está incorreto,** a menos que, por exemplo, você trabalhe com a parametrização de γ em termos de x e transforme tudo em função de x. Ficamos com x, $y = p(x)$ e $z = q(x)$. E teremos dx, $dy = p'(x)dx$ e $dz = q'(x)dx$.

Exemplo 6

Calcule $\displaystyle\int_\gamma xy\, dx + (x-y)\, dy$, onde γ consiste dos segmentos de reta de $(0,0)$ a $(2,0)$ e de $(2,0)$ a $(3,2)$.

Curva Inversa

Definição 7

Seja $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva lisa e seja $\overline{\gamma}$ a curva com mesmo traço de γ, mas percorrido no sentido inverso. A curva $\overline{\gamma}$ é a *curva percorrida no sentido inverso de* γ, ou *curva inversa de* γ. Assim, seus pontos inicial e final são respectivamente os pontos final e inicial de γ.

É sempre possivel parametrizar $\overline{\gamma}$ por

$$\overline{\gamma}(u) = \gamma(\alpha(u)) \ ,$$

onde $\alpha(u) = a + b - u$.
Como os vetores tangentes de γ e $\overline{\gamma}$ são opostos teremos que

$$\int_{\overline{\gamma}} \overrightarrow{F}\, d\overrightarrow{r} = -\int_\gamma \overrightarrow{F}\, d\overrightarrow{r} \ .$$

Independência da paramentrização

É possível demonstrar que a integral de linha $\int_\gamma \overrightarrow{F}\, d\overrightarrow{r}$ não depende da parametrização de γ utilizada, desde que não se inverta sua orientação.
Também é possível provar que para duas parametrizações distintas γ e $\widetilde{\gamma}$, de uma mesma curva com traço C, que têm mesma orientação, existe uma função $\alpha(u)$ tal que

$$\widetilde{\gamma}(u) = \gamma(\alpha(u)) \ .$$

A curva $\widetilde{\gamma}$ é chamada de *reparametrização* de γ.

Notação

Como a integral de linha independe da parametrização utilizada (desde que mantida a orientação), podemos definir

$$\int_C \overrightarrow{F}\, d\overrightarrow{r} = \int_\gamma \overrightarrow{F}\, d\overrightarrow{r} \ ,$$

onde C é o traço de uma curva lisa simples munido de um sentido de percurso e γ é qualquer curva lisa simples com traço C, cuja orientação corresponde ao sentido de percurso de C.

Exemplo

Exemplo 8

Seja C a intersecção do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ com o semiplano

$x + z = 0$, $x \geq 0$, percorrida de modo que sua projeção no plano

$0xy$ tenha sentido anti-horário.

Seja $\overrightarrow{F}(x, y, z) = x^2\overrightarrow{\imath} + y^2\overrightarrow{\jmath} + z^2\overrightarrow{k}$.

Calcule $\int_C \overrightarrow{F}\, d\overrightarrow{r}$.

Definição 9

Seja γ uma curva lisa em $\mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ e $\varphi = \varphi(x, y, z)$ um campo escalar contínuo definido sobre o traço de γ.

A *integral de linha de φ ao longo de γ, em relação ao comprimento de arco,* que se denota por $\int_\gamma \varphi\, ds$, é definida pela integral de Riemann

$$\int_\gamma \varphi\, ds = \int_a^b \varphi(x(t), y(t), z(t))|\overrightarrow{v}(t)|\, dt \ ,$$

onde entendemos a notação $ds = |\overrightarrow{v}(t)|\, dt$.

Definimos a integral de linha sobre uma curva lisa por partes da maneira usual.

Propriedades

Seja $\varphi \equiv 1$. Definimos anteriormente

$$L(\gamma) = \int_a^b |\overrightarrow{v}(t)|\, dt \ ,$$

onde γ é uma curva lisa por partes.

Logo,

$$L(\gamma) = \int_a^b |\overrightarrow{v}(t)|\, dt = \int_\gamma 1\, ds = \int_\gamma ds \ .$$

Propriedades, cont.

As integrais de linha de campo escalar também são independentes da paramentrização escolhida. Mais ainda, elas são independentes da orientação da curva.
Assim, se $C \subset \mathbb{R}^3$ é o traço de uma curva lisa simples, podemos definir

$$\int_C \varphi\, ds = \int_\gamma \varphi\, ds\ ,$$

onde γ é uma curva lisa simples qualquer, de traço C.

Exemplo

Exemplo 10

Seja C a intersecção do cilindro parabólico $y = x^2$ com a parte do plano $z = x$ tal que $0 \leq x \leq 1$. Calcule $\int_C \varphi\, ds$, onde $\varphi(x, y, z) = x$.

Exemplo 11

Calcule $\int_C (x + y)\, ds$, onde C é o triângulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$.

Componente tangencial de campo vetorial

Dada uma curva γ e um campo vetorial $\overrightarrow{F}$, podemos considerar a função (ou campo escalar) φ, definida ao longo de γ

$$\varphi(t) = \overrightarrow{F}(x(t), y(t), z(t)) \cdot \overrightarrow{T}(t)\ ,$$

onde $\overrightarrow{T}(t) = \dfrac{\overrightarrow{v}(t)}{|\overrightarrow{v}(t)|}$, é o vetor tangente unitário de γ.
Assim definida, φ é a componente de $\overrightarrow{F}$ ao longo de γ, isto é, é o módulo da projeção de $\overrightarrow{F}$ sobre $\overrightarrow{T}$.

Componente tangencial de campo vetorial, cont.

Então temos

$$\int_\gamma \varphi\, ds = \int_a^b \varphi(t)|\overrightarrow{v}(t)|\, dt =$$

$$= \int_a^b (\overrightarrow{F}(x(t), y(t), z(t)) \cdot \overrightarrow{T}(t))\, |\overrightarrow{v}(t)|\, dt =$$

$$= \int_a^b (\overrightarrow{F}(x(t), y(t), z(t)) \cdot \frac{\overrightarrow{v}(t)}{|\overrightarrow{v}(t)|})\, |\overrightarrow{v}(t)|\, dt =$$

$$= \int_a^b \overrightarrow{F}(x(t), y(t), z(t)) \cdot \overrightarrow{v}(t)\, dt =$$

$$= \int_\gamma \overrightarrow{F}\, d\overrightarrow{r}\ .$$

Componente tangencial de campo vetorial, cont.

Ou seja, a integral de linha do campo vetorial $\overrightarrow{F}$ ao longo de γ é a integral de linha em relação ao comprimento de arco da componente tangencial de $\overrightarrow{F}$.