Gradiente

Definição 1

Dado um campo escalar T, definido e com derivadas parciais em um subconjunto aberto D do $\mathbb{R}^2$ (ou do $\mathbb{R}^3$), o campo vetorial que a cada ponto $P=(x,y)$ (ou $P=(x,y,z)$) de D associa o vetor

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}(P), \frac{\partial T}{\partial y}(P)\right)$$

$$\left(\text{ou } \left(\frac{\partial T}{\partial x}(P), \frac{\partial T}{\partial y}(P), \frac{\partial T}{\partial z}(P)\right)\right)$$

é o campo *gradiente* do campo escalar T.

Notação

O gradiente de T é denotado por

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, T = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}\right) = \frac{\partial T}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial T}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial T}{\partial z}\vec{k}\ .$$

Ou seja, $\overrightarrow{\text{grad}}\, T$ é o operador $\overrightarrow{\text{grad}}$ aplicado a T

$$\overrightarrow{\text{grad}} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\ .$$

Outra notação utilizada é

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\ .$$

Divergente

Definição 2

Dado um campo vetorial $\vec{v} = P\vec{\imath} + Q\vec{\jmath}$ (ou $\vec{v} = P\vec{\imath} + Q\vec{\jmath} + R\vec{k}$) definido em um aberto D do $\mathbb{R}^2$ (ou do $\mathbb{R}^3$), tal que P e Q (ou P, Q e R) possuam derivadas parciais em D, o campo escalar dado pela função

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$$

$$\left(\text{ou } \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)$$

é o *divergente* do campo vetorial $\vec{v}$.

Notação

O divergente de um campo vetorial pode ser descrito como

$$\text{div}\,\vec{v} = \vec{\nabla}.\vec{v} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot\vec{v} =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot(P\vec{\imath} + Q\vec{\jmath} + R\vec{k}) =$$

$$= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\ .$$

Rotacional

Definição 3

Se $\vec{v}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{\imath} + Q(x,y,z)\vec{\jmath} + R(x,y,z)\vec{k}$ é um campo vetorial definido em um aberto D do $\mathbb{R}^3$ tal que P, Q e R possuem derivadas parciais em D, o campo vetorial

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{\imath} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$$

é o *rotacional* do campo $\vec{v}$.

Notação

O rotacional de um campo $\vec{v}$ pode ser expresso simbolicamente por

$$\vec{v} = \vec{\nabla} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Observe que se $\vec{v}(x,y) = P(x,y)\vec{\imath} + Q(x,y)\vec{\jmath}$, então

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}(P\vec{\imath} + Q\vec{\jmath} + 0\vec{k}) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

Propriedades

Propriedade 1

Sejam $\vec{v}$, $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ campos de classe $\mathcal{C}^1$, f função $\mathcal{C}^1$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Temos as seguintes propriedades:

a) $\mathrm{div}\,(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \mathrm{div}\,\vec{v}_1 + \mathrm{div}\,\vec{v}_2$;

b) $\mathrm{div}\,(\lambda\vec{v}) = \lambda\,\mathrm{div}\,\vec{v}$;

c) $\mathrm{div}\,(f\vec{v}) = f\,\mathrm{div}\,\vec{v} + (\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f)\cdot\vec{v}$.

Propriedades, cont.

Propriedade 2

Seja $\phi = \phi(x,y,z)$ uma função de classe $\mathcal{C}^2$. Verifique que $\mathrm{div}\,(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi) = \dfrac{\partial^2\phi}{\partial x} + \dfrac{\partial^2\phi}{\partial y} + \dfrac{\partial^2\phi}{\partial z}$.

O operador $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x} + \dfrac{\partial^2}{\partial y} + \dfrac{\partial^2}{\partial z}$ é chamado *operador de Laplace*.

É comum denota-lo por $\Delta = \nabla^2\phi = \nabla\cdot(\nabla\phi)$.

Quando $\Delta\phi = 0$, diz-se que a função é *harmônica*.

Exemplo 4

A função $\phi(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ é harmônica.

Propriedades, cont.

Propriedade 3

Sejam $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{v}_1$ e $\overrightarrow{v}_2$ campos de classe $\mathcal{C}^2$ e f função $\mathcal{C}^2$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Temos as seguintes propriedades:

a) $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2) = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{v}_2$;

b) $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\lambda \overrightarrow{v}) = \lambda\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{v}$;

c) $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(f \overrightarrow{v}) = f\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{v} + (\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f) \wedge \overrightarrow{v}$.

Propriedades, cont.

Propriedade 4

Seja $\phi = \phi(x, y, z)$ uma função de classe $\mathcal{C}$. Verifique que

$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi) = \overrightarrow{0}$.

Quando um campo tem rotacional nulo é chamado *irrotacional*.

Exemplo 5

Então acabamos de verificar que todo campo gradiente é irrotacional.

Propriedades, cont.

Propriedade 5

Seja $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}(x, y, z)$ um campo de classe $\mathcal{C}^2$.

Verifique que $\mathrm{div}\,(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{v}) \equiv 0$.

Quando um campo tem divergente nulo, dizemos que o campo é *solenoidal*.

Exemplo 6

Acabamos de verificar que todo campo rotacional é solenoidal.

Exemplo 7

Verifique que o campo $\overrightarrow{r}/r^3$, onde $\overrightarrow{r} = x\overrightarrow{\imath} + y\overrightarrow{\jmath} + z\overrightarrow{k}$ e $r = |\overrightarrow{r}|$, é solenoidal fora da origem.

Definições

No que segue chamaremos de domínio do $\mathbb{R}^2$ (ou do $\mathbb{R}^3$), a um subconjunto aberto e conexo do $\mathbb{R}^2$ (ou do $\mathbb{R}^3$); e de região fechada do $\mathbb{R}^2$ (ou do $\mathbb{R}^3$) à união de um domínio do $\mathbb{R}^2$ (ou do $\mathbb{R}^3$) com sua fronteira.

Teorema 8 (Green)

Seja R uma região fechada e limitada do $\mathbb{R}^2$ cuja fronteira ∂R é formada por um número finito de curvas simples fechadas e lisas por partes(LPP), duas a duas disjuntas orientadas no sentido que deixa R à esquerda da fronteira ∂R.
Seja $\overrightarrow{F} = P(x,y)\overrightarrow{\imath} + Q(x,y)\overrightarrow{\jmath}$ um campo vetorial de classe $\mathcal{C}^1$ em um aberto Ω com $R \subset \Omega$. Então,

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \int_{\partial R} \overrightarrow{F}\, d\overrightarrow{r} = \int_{\partial R} Pdx + Qdy$$

onde a integral de linha do segundo membro é a soma das integrais sobre as curvas componentes da fronteira ∂R.

Exemplos

Seja um campo genérico $\overrightarrow{F} = P(x,y)\overrightarrow{\imath} + Q(x,y)\overrightarrow{\jmath}$.

Exemplo 9

Vamos calcular as duas integrais do enunciado do Teorema de Green, sendo $R = [a,b] \times [c,d]$.

Exemplo 10

Vamos calcular as duas integrais do enunciado do Teorema de Green, sendo $R = R_1 - (R_2 - \partial R_2)$, onde $R_1 = [a_1, b_1] \times [c_1, d_1]$, $R_2 = [a_2, b_2] \times [c_2, d_2]$, com $[a_2, b_2] \subset]a_1, b_1[$ e $[c_2, d_2] \subset]c_1, d_1[$.

Exemplos, cont.

Exemplo 11

Vamos calcular as duas integrais do enunciado do Teorema de Green, sendo R uma região que pode ser descrita, simultaneamente, através de funções na variável x e através de funções na variável y, isto é

$$R = \{(x,y) \,|\, a \le x \le b \text{ e } p(x) \le y \le q(x)\}$$

e

$$R = \{(x,y) \,|\, c \le y \le d \text{ e } r(y) \le x \le s(y)\}$$

para $p, q \colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ e $r, s \colon [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ funções de classe $\mathcal{C}^1$.

Exemplos, cont.

Exemplo 12

Seja $\overrightarrow{F}(x,y) = (2x + y^2)\overrightarrow{\imath} + (3y - 4x)\overrightarrow{\jmath}$. Vamos calcular as duas integrais do Teorema de Green, sendo R o triângulo de vértices $(0,0)$, $(2,0)$ e $(2,1)$.

Exemplo 13

Seja $\overrightarrow{F}(x,y) = -x^2y\overrightarrow{\imath} + xy^2\overrightarrow{\jmath}$ e, R o disco de centro $(0,0)$ e raio a. Vamos calcular $\displaystyle\int_{\partial R} \overrightarrow{F}\, d\overrightarrow{r}$, para ∂R orientada no sentido no sentido anti-horário.

Exemplos, cont.

Exemplo 14

Seja $\overrightarrow{F}(x,y) = \dfrac{-y}{x^2+y^2}\overrightarrow{\imath} + \dfrac{x}{x^2+y^2}\overrightarrow{\jmath}$. Seja γ uma curva LPP que contém a origem no seu interior. Calculemos $\displaystyle\int_\gamma \overrightarrow{F}\, d\overrightarrow{r}$, para γ percorrida uma vez no sentido anti-horário.

Exemplo 15

Vamos calcular a integral de linha
$I = \displaystyle\int_\gamma \left(\frac{-y}{x^2+y^2} + x^3\right) dx + \left(\frac{x}{x^2+y^2} + x + y^2\right) dy$, onde γ é a elipse $\dfrac{(x-2)^2}{2^2} + \dfrac{(y-1)^2}{(1/2)^2} = 1$.

Exemplos, cont.

Exemplo 16

Calcule a integral de linha $\displaystyle\int_\gamma \overrightarrow{F}\, d\overrightarrow{r}$ onde γ é o gráfico de $y = \cos x$, $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ percorrida de $(-\pi/2, 0)$ a $(\pi/2, 0)$ e $\overrightarrow{F}(x,y) = 2x\cos x\,\overrightarrow{\imath} + (7xy - x^2 \operatorname{sen} y)\overrightarrow{\jmath}$.

Notação

Observe que, se $\overrightarrow{F} = P(x,y)\overrightarrow{\imath} + Q(x,y)\overrightarrow{\jmath}$, o integrando no primeiro membro da fórmula do teorema de Green, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}$, é a componente em $\overrightarrow{k}$ de $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{F}$, portanto $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = (\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{F}) \cdot \overrightarrow{k}$.

O teorema de Green então pode ser escrito como

$$\int_{\partial R} \overrightarrow{F}\, d\overrightarrow{r} = \iint_R (\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{F}) \cdot \overrightarrow{k}\, dxdy .$$