Campos Conservativos

Seja $\overrightarrow{F}$ um campo contínuo definido num domínio Ω de $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^3$), e sejam A e B dois pontos em Ω. Em geral a integral de linha de $\overrightarrow{F}$ sobre uma curva lisa por partes ligando A a B, depende da curva escolhida.
Para uma classe especial de campos, a integral de linha não depende da curva escolhida.

Definição 1
Um campo $\overrightarrow{F}$ é *conservativo num domínio* Ω se, para cada par de pontos A e B de Ω, a integral de linha de $\overrightarrow{F}$ é a mesma ao longo de qualquer curva lisa por partes ligando A e B contida em Ω.

Exemplo

Exemplo 2
Considere $\overrightarrow{F}(x,y) = x\overrightarrow{\imath} + (x^2+y^2)\overrightarrow{\jmath}$ em $\mathbb{R}^2$ Considere os caminhos de $(2,0)$ a $(0,2)$ dados por:
γ_1 é o arco de circunferência $y = \sqrt{4-x^2}$;
γ_2 é a poligonal ligando os pontos $(2,0)$, $(0,0)$ e $(0,2)$.
Obtemos os seguintes valores para as respectivas integrais de linha

$$\int_{\gamma_1} \overrightarrow{F}\, d\overrightarrow{r} = 2(\sqrt{2}-1)$$

e

$$\int_{\gamma_2} \overrightarrow{F}\, d\overrightarrow{r} = 10/3$$

Concluímos que $\overrightarrow{F}$ não é conservativo, pois

$$\int_{\gamma_1} \overrightarrow{F}\, d\overrightarrow{r} \neq \int_{\gamma_2} \overrightarrow{F}\, d\overrightarrow{r}.$$

Caracterização dos campos conservativos

Definição 3
Seja $\overrightarrow{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\overrightarrow{\imath} + Q(x,y,z)\overrightarrow{\jmath} + R(x,y,z)\overrightarrow{k}$ um campo contínuo definido num domínio Ω de $\mathbb{R}^3$. Dizemos que $\overrightarrow{F}$ é um *campo gradiente* se existir um campo escalar $\psi = \psi(x,y,z)$ de classe $\mathcal{C}^1$ em Ω, tal que $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\psi = \overrightarrow{F}$, ou seja,

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} = Q, \quad \frac{\partial\psi}{\partial z} = R\ .$$

O campo escalar ψ é denominado um *potencial* de $\overrightarrow{F}$.

Se ψ é um potencial de $\overrightarrow{F}$ em Ω, então $\psi + k$, k constante, também é um potencial de $\overrightarrow{F}$. Reciprocamente, se ψ_1 e ψ_2 são potenciais de $\overrightarrow{F}$ em Ω, então $\psi_1 - \psi_2$ é constante.

Exemplos

Exemplo 4
Seja $\overrightarrow{E}(x,y,z) = -\overrightarrow{r}/r^3$, $\overrightarrow{r} = (x,y,z)$, $r = |\overrightarrow{r}|$, $r \neq (0,0,0)$.
Então, $\psi(x,y,z) = 1/r = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ é um potencial de $\overrightarrow{E}$.

Exemplo 5
Encontre um potencial para $\overrightarrow{F}(x,y,z) = \dfrac{x\overrightarrow{\imath} + y\overrightarrow{\jmath}}{x^2+y^2}$ em $D = \mathbb{R}^2 - (0,0)$.

Caracterização dos campos conservativos, cont.

Teorema 6
Seja $\overrightarrow{F}$ um campo contínuo definido num domínio Ω,
$\overrightarrow{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\overrightarrow{\imath} + Q(x,y,z)\overrightarrow{\jmath} + R(x,y,z)\overrightarrow{k}$.

$\overrightarrow{F}$ é conservativo se, e somente se, $\overrightarrow{F}$ é um campo gradiente.

Demonstração.

Suponhamos que $\overrightarrow{F}$ é um campo gradiente. então existe ψ, campo escalar $\mathcal{C}^1$ em Ω, com $\overrightarrow{\text{grad}}\,\psi = \overrightarrow{F}$. Sejam A e B dois pontos quaisquer em Ω, e γ uma curva lisa por partes $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a,b]$ com $\gamma(a) = A$ e $\gamma(b) = B$, ligando A e B.

Demonstração, cont.

Temos

$$\int_\gamma \overrightarrow{F}\,d\overrightarrow{r} = \int_a^b \overrightarrow{F}(\gamma(t)).\overrightarrow{\gamma}'(t)\,dt = \int_a^b \overrightarrow{\text{grad}}\,\psi(\gamma(t)).\overrightarrow{\gamma}'(t)\,dt =$$
$$= \int_a^b [\frac{\partial\psi}{\partial x}(\gamma(t))x'(t) + \frac{\partial\psi}{\partial y}(\gamma(t))t'(t) + \frac{\partial\psi}{\partial z}(\gamma(t))z'(t)]\,dt =$$
$$= \int_a^b \frac{\partial\psi(\gamma(t))}{\partial t}\,dt = \psi(\gamma(b)) - \psi(\gamma(a)) = \psi(B) - \psi(A)\ .$$

Portanto, $\int_\gamma \overrightarrow{F}\,d\overrightarrow{r} = \psi(B) - \psi(A)$ só depende de A e B, e $\overrightarrow{F}$ é conservativo.

Observe que esse resultado nos fornece também o valor da integral de linha de $\overrightarrow{F}$ ao longo de qualquer curva ligando A a B.

Demonstração, cont.

Suponhamos agora que $\overrightarrow{F}$ é um campo conservativo em Ω.
Fixemos um ponto $A = (a_1, a_2, a_3)$ em Ω. Vamos definir uma função ψ em Ω. Seja $X = (x,y,z)$ um ponto qualquer em Ω.
Como Ω é conexo, é possível ligar A e X por uma curva lisa por partes γ.
Definimos $\psi(x,y,z) = \int_\gamma \overrightarrow{F}\,d\overrightarrow{r}$. Como supomos $\overrightarrow{F}$ conservativo, essa integral independe da escolha da curva γ, portanto ψ é uma função bem definida e podemos, sem riscos, denotar
$\psi(x,y,z) = \int_A^X \overrightarrow{F}\,d\overrightarrow{r}$.
Vamos provar que $\overrightarrow{\text{grad}}\,\psi = \overrightarrow{F}$.

Demonstração, cont.

Começamos por provar que $\dfrac{\partial\psi}{\partial x} = P(x,y,z)$ (as outras igualdades serão análogas).
A demonstração segue usando a definição de derivada parcial e escolhendo-se um caminho adequado (podemos porque $\overrightarrow{F}$ é um campo conservativo). Com a aplicação do Teorema do Valor Médio para integrais e a continuidade de P obtemos o resultado desejado. $\square$

Observações

Como $\int_\gamma \overrightarrow{F}\, d\overrightarrow{r} = \psi(B) - \psi(A)$, observe que ψ funciona como uma "primitiva" de $\overrightarrow{F}$. Além disso, podemos concluir que $\int_\gamma \overrightarrow{F}\, d\overrightarrow{r} = 0$ sempre que γ for uma curva fechada.

Se $\overrightarrow{F}$ é um campo conservativo, $\int_A^B \overrightarrow{F}\, d\overrightarrow{r}$ pode ser usada para denotar a integral de linha de $\overrightarrow{F}$ ao longo de *qualquer* curva lisa por partes de A a B.

Caracterização dos campos conservativos, cont.

Teorema 7
Seja $\overrightarrow{F}$ um campo contínuo, definido num domínio Ω de $\mathbb{R}^3$.

$\overrightarrow{F}$ é conservativo se, e somente se, $\int_\gamma \overrightarrow{F}\, d\overrightarrow{r} = 0$ para **qualquer** *curva γ, lisa por partes e* **fechada** *em Ω.*

Demonstração.

Se $\overrightarrow{F}$ é conservativo, pelas observações feitas após o Teorema 6, sua integral de linha ao longo de uma curva LPP e fechada é nula.

Demonstração, cont.

Reciprocamente, dados dois pontos A e B de Ω, sejam γ_1 e γ_2 duas curvas LPP ligando A e B. Tomando a curva $\gamma = \gamma_1 \cup \overline{\gamma_2}$, teremos que $\int_\gamma \overrightarrow{F}\, d\overrightarrow{r} = 0$.

Como

$$\int_\gamma \overrightarrow{F}\, d\overrightarrow{r} = \int_{\gamma_1} \overrightarrow{F}\, d\overrightarrow{r} + \int_{\overline{\gamma_2}} \overrightarrow{F}\, d\overrightarrow{r} = \int_{\gamma_1} \overrightarrow{F}\, d\overrightarrow{r} - \int_{\gamma_2} \overrightarrow{F}\, d\overrightarrow{r}$$

temos

$$\int_{\gamma_1} \overrightarrow{F}\, d\overrightarrow{r} = \int_{\gamma_2} \overrightarrow{F}\, d\overrightarrow{r}$$

o que demonstra que $\overrightarrow{F}$ é conservativo. $\square$

Caracterização dos campos conservativos, cont.

Teorema 8
Seja $\overrightarrow{F}$ um campo contínuo, definido num domínio Ω de $\mathbb{R}^3$.
$\overrightarrow{F}$ é conservativo se, e somente se, $\int_\gamma \overrightarrow{F}\, d\overrightarrow{r} = 0$ para **qualquer** *curva γ, lisa por partes,* **fechada e simples** *em Ω.*

Demonstração fora do escopo deste curso.

Caracterização dos campos conservativos, cont.

Teorema 9

Seja $\overrightarrow{F}$ um campo contínuo, definido num domínio Ω de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

$$\text{Se } \overrightarrow{F} \text{ é conservativo, então } \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{F} = 0.$$

Demonstração.

Imediata pois $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\psi) = 0$. □

O teorema que se segue também é válido para $\mathbb{R}^3$, mas no momento só enunciaremos e demonstraremos para o $\mathbb{R}^2$.

Caracterização dos campos conservativos, cont.

Teorema 10

Seja $\overrightarrow{F}$ um campo contínuo, definido num domínio Ω de $\mathbb{R}^2$, simplesmente conexo.

$$\text{Se } \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{F} = 0, \text{ então } \overrightarrow{F} \text{ é conservativo.}$$

Demonstração.

Seja γ uma curva qualquer LPP, simples e fechada de Ω. Como Ω é simplesmente conexo, $\mathrm{int}\,\gamma \subset \Omega$.

Pelo teorema de Green aplicado a região limitada por γ, temos

$$\int_\gamma \overrightarrow{F}\, d\overrightarrow{r} = \iint_R \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{k}\; dxdy = 0\ .$$

Concluímos pelo teorema 8 que $\overrightarrow{F}$ é conservativo. □