Superfície Parametrizada

Definição 1

Uma *superfície parametrizada* do $\mathbb{R}^3$ é uma função Γ, definida num domínio U do $\mathbb{R}^2$, a valores em $\mathbb{R}^3$, que, a cada $(u, v) \in U$, associa o ponto do $\mathbb{R}^3$, $\Gamma(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, onde $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ e $z = z(u, v)$ são funções de classe $\mathcal{C}^1$ de U em $\mathbb{R}$. O vetor $\overrightarrow{r}(u, v) = x(u, v)\overrightarrow{\imath} + y(u, v)\overrightarrow{\jmath} + z(u, v)\overrightarrow{k}$ é o vetor posição do ponto $\Gamma(u, v)$.

A *imagem* ou *traço* da superfície parametrizada Γ é o subconjunto S de $\mathbb{R}^3$ formado pelos pontos $\Gamma(u, v)$ com $(u, v) \in U$.

Notação

Usaremos a notação

$$\Gamma : \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}$$

para uma superfície parametrizada de $\mathbb{R}^3$. As funções $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ e $z = z(u, v)$ são chamadas *equações paramétricas de* Γ, e o conjunto S é dito *parametrizado por* Γ.

Exemplos

Exemplo 2

O plano Oxy em $\mathbb{R}^3$ pode ser parametrizado por

$$\Gamma : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 0 \end{cases} \qquad U = \mathbb{R}^2$$

Vetores tangentes plano $0xy$

Exemplos, cont.

Exemplo 3

O plano $ax + by + cz = d$ com a, b, c, $d \in \mathbb{R}$, com $c \neq 0$ em $\mathbb{R}^3$ pode ser parametrizado por

$$\Gamma : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \dfrac{d - au - bv}{c} \end{cases} \qquad U = \mathbb{R}^2$$

Vetores tangentes plano $ax + by + cz = d$

Exemplos, cont.

Exemplo 4

A superfície esférica S de raio $a > 0$ centrada na origem pode ser parametrizada usando-se as coordenadas esféricas do $\mathbb{R}^3$, com $\rho = a$ constante. Temos

$$\Gamma : \begin{cases} x = a \operatorname{sen} u \cos v \\ y = a \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \\ z = a \cos u \end{cases} \qquad (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

▸ Vetores tangentes da esfera

Exemplos, cont.

Exemplo 5

O cilindro de eixo $0z$ e de raio a, $a > 0$ pode ser parametrizada por

$$\Gamma : \begin{cases} x = a \cos u \\ y = a \operatorname{sen} u \\ z = v \end{cases} \qquad (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

▸ Vetores tangentes do cilindro

Exemplos, cont.

Exemplo 6

O cone de eixo $0z$, vértice na origem e ângulo de abertura α, admite a parametrização proveniente das coordenadas cilindricas

$$\Gamma : \begin{cases} x = v \cos u \operatorname{tg} \alpha \\ y = v \operatorname{sen} u \operatorname{tg} \alpha \\ z = v \end{cases} \qquad 0 < \alpha < \pi/2$$

De fato, $\operatorname{tg} \alpha = l/v$ e $x = l \cos u$, $y = l \operatorname{sen} u$. ▸ Vetores tangentes do cone

Exemplos, cont.

cont.

Já as coordenadas esféricas nos dão a parametrização

$$\Gamma : \begin{cases} x = \rho \operatorname{sen} \alpha \cos v \\ y = \rho \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} v \\ z = \rho \cos \alpha \end{cases} \qquad (\rho, u) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$$

para a parte do cone com $z \geq 0$.

Exemplos, cont.

Exemplo 7

O toro obtido pela revolução em torno do eixo $0z$ da circunferência de raio b centrada em $(0, a, 0)$, com $a > b > 0$, tem como parametrização

$$\Gamma : \begin{cases} x = (a + b\cos v)\cos u \\ y = (a + b\cos v)\,\mathrm{sen}\, u \\ z = b\,\mathrm{sen}\, v \end{cases} \qquad (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

▸ Vetores tangentes do toro

A parametrização do paraboloíde eliptico, o parabolóide hiperbólico são imediatas a partir de suas equações; enquanto o elipsóide é apenas uma modificação das coordenadas esféricas, como já vimos.

Curvas Coordenadas

Definição 8

Seja Γ uma superfície parametrizada de $\mathbb{R}^3$ dada por $\Gamma(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, $(u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2$, de traço S. A cada curva α de U parametrizada por

$$\alpha(t) = (u(t), v(t)) \in U, \;\; t \in [a, b]$$

corresponde uma curva $\gamma \in \mathbb{R}^3$ parametrizada por

$$\begin{aligned} \gamma(t) =& (x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t))) \\ =& \Gamma(\alpha(t)) = (\Gamma \circ \alpha)(t) \end{aligned}$$

Essa curva γ cujo traço está contido em S é chamada uma *curva da superfície parametrizada* Γ.

Curvas Coordenadas, cont.

Observe que usando a regra da cadeia determinamos o vetor tangente à curva γ, da superfície Γ, no ponto $(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$, em função das coordenadas do vetor tangente $\alpha'(t_0) = (u'(t_0), v'(t_0))$, $t_0 \in [a, b]$, no caso em que α é diferenciável. Assim,

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= \left(\frac{\partial x}{\partial u} u' + \frac{\partial x}{\partial v} v', \frac{\partial y}{\partial u} u' + \frac{\partial y}{\partial v} v', \frac{\partial z}{\partial u} u' + \frac{\partial z}{\partial v} v' \right) \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) u' + \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right) v' \end{aligned}$$

Se γ é uma curva diferenciável em Γ, o seu vetor tangente em t_0 diz-se um *vetor tangente a* Γ em $(u_0, v_0) = (u(t_0), v(t_0))$.

Curvas Coordenadas, cont.

As imagens das retas paralelas aos eixos coordenados $0u$ e $0v$ são curvas particularmente importantes da superfície Γ:

Definição 9

As curvas da superfície Γ dadas por

$$\begin{aligned} &\gamma_1(u) = (x(u, v_0), y(u, v_0), z(u, v_0)) \\ &\text{e} \\ &\gamma_2(v) = (x(u_0, v), y(u_0, v), z(u_0, v)), \end{aligned}$$

dadas pela imagem das retas $u = u_0$ e $v = v_0$, são as *curvas coordenadas de* Γ *no ponto* $\Gamma(u_0, v_0)$.

Curvas Coordenadas, cont.

Os vetores tangentes a essas curvas coordenadas no ponto $P = \Gamma(u_0, v_0)$ são

$$\vec{\gamma}'_1(u_0) = \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0)\vec{\imath} + \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0)\vec{\jmath} + \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0)\vec{k}$$

e

$$\vec{\gamma}'_2(v_0) = \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0)\vec{\imath} + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0)\vec{\jmath} + \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0)\vec{k}$$

denotados, respectivamente, por $\vec{X}_u(u_0, v_0)$ e $\vec{X}_v(u_0, v_0)$.

Exemplos

Revisitando nosso exemplos anteriores, teremos

Exemplo 10

O plano Oxy em $\mathbb{R}^3$ ▸ Plano 0xy tem os vetores tangentes

$$\vec{X}_u(u, v) = \vec{\imath}$$

$$\vec{X}_v(u, v) = \vec{\jmath}$$

Exemplos, cont.

Exemplo 11

O plano $ax + by + cz = d$ com a, b, c, $d \in \mathbb{R}$, com $c \neq 0$ em $\mathbb{R}^3$ ▸ Plano $ax + by + cz = d$ tem os vetores tangentes

$$\vec{X}_u(u, v) = \vec{\imath} - \frac{a}{c}\vec{k}$$

$$\vec{X}_v(u, v) = \vec{\jmath} - \frac{b}{c}\vec{k}$$

Exemplos, cont.

Exemplo 12

A superfície esférica S de raio $a > 0$ centrada na origem ▸ Esfera tem os vetores tangentes

$$\vec{X}_u(u, v) = a \cos u \cos v\,\vec{\imath} + a \cos u \operatorname{sen} v\,\vec{\jmath} - a \operatorname{sen} u\,\vec{k}$$

$$\vec{X}_v(u, v) = -a \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v\,\vec{\imath} + a \operatorname{sen} u \cos v\,\vec{\jmath}$$

Exemplos, cont.

Exemplo 13

O cilindro de eixo $0z$ e de raio a, $a > 0$, Cilindro tem os vetores tangentes

$$\vec{X}_u(u,v) = -a \operatorname{sen} u\,\vec{\imath} + a\cos u\,\vec{\jmath}$$

$$\vec{X}_v(u,v) = \vec{k}$$

Exemplos, cont.

Exemplo 14

O cone de eixo $0z$, vértice na origem e ângulo de abertura α, tem os vetores tangentes

$$\vec{X}_u(u,v) = -v \operatorname{sen} u \operatorname{tg}\alpha\,\vec{\imath} + v\cos u \operatorname{tg}\alpha\,\vec{\jmath}$$

$$\vec{X}_v(u,v) = \cos u \operatorname{tg}\alpha\,\vec{\imath} + \operatorname{sen} u \operatorname{tg}\alpha\,\vec{\jmath} + \vec{k}$$

Exemplos, cont.

Exemplo 15

O toro obtido pela revolução em torno do eixo $0z$ da circunferência de raio b centrada em $(0, a, 0)$, com $a > b > 0$, Toro tem os vetores tangentes

$$\vec{X}_u(u,v) = -(a + b\cos v)\operatorname{sen} u\,\vec{\imath} + (a + b\cos v)\cos u\,\vec{\jmath}$$

$$\vec{X}_v(u,v) = -b \operatorname{sen} v\cos u\,\vec{\imath} - b\operatorname{sen} v \operatorname{sen} u\,\vec{\jmath} + b\cos v\,\vec{k}$$

Produto Vetorial Fundamental

Definição 16

O produto vetorial $\vec{X}_u \wedge \vec{X}_v(u_0, v_0)$ é denominado *produto vetorial fundamental* de Γ em (u_0, v_0). Ele é calculado por

$$\vec{X}_u \wedge \vec{X}_v(u_0, v_0) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} (u_0, v_0)$$

Superfície Lisa – Plano Tangente

Sabemos que uma condição necessária e suficiente para que dois vetores do $\mathbb{R}^3$ sejam linearmente independentes é que seu produto vetorial seja não-nulo.
Podemos então dizer que Γ admite um plano tangente em (u_0, v_0) quando nesse ponto $\|\overrightarrow{X}_u \wedge \overrightarrow{X}_v\| \neq 0$

Definição 17

Uma superfície parametrizada $\Gamma\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ diz-se *lisa* ou *regular* se, para todo $(u, v) \in U$, o produto vetorial fundamental $\overrightarrow{X}_u \wedge \overrightarrow{X}_v$ é não-nulo. Nesse caso, o plano gerado pelos vetores $\overrightarrow{X}_u$ e $\overrightarrow{X}_v$, que passa por $\Gamma(u, v)$, é o *plano tangente* a Γ em (u, v).

Exercício – Vetor Normal

Exercício 18

Calcule $\overrightarrow{X}_u \wedge \overrightarrow{X}_v$ e $\|\overrightarrow{X}_u \wedge \overrightarrow{X}_v\|$ para cada um dos exemplos anteriores, discutindo em cada caso para quais valores teremos $\|\overrightarrow{X}_u \wedge \overrightarrow{X}_v\| \neq 0$.

Definição 19

Seja Γ uma superfície parametrizada lisa. O vetor $\overrightarrow{N}(u, v) = \dfrac{\overrightarrow{X}_u \wedge \overrightarrow{X}_v}{\|\overrightarrow{X}_u \wedge \overrightarrow{X}_v\|}$, normal ao plano tangente a Γ em (u, v), e unitário, é chamado *vetor normal principal* de Γ em (u, v).
O vetor $-\overrightarrow{N}(u, v) = -\dfrac{\overrightarrow{X}_u \wedge \overrightarrow{X}_v}{\|\overrightarrow{X}_u \wedge \overrightarrow{X}_v\|}$ também é normal a Γ em (u, v) e unitário.