- Testes Qui-quadrado - Aderência e Independência

1. Testes de Aderência

Objetivo: Testar a adequabilidade de um modelo probabilístico a um conjunto de dados observados.

Exemplo 1: Segundo Mendel (geneticista famoso), os resultados dos cruzamentos de ervilhas amarelas redondas com ervilhas verdes enrugadas ocorrem na proporção de 9:3:3:1, ou seja, seguem uma distribuição de probabilidades dada por:

Resultado	Amarela redonda	Amarela enrugada	Verde redonda	Verde enrugada
Probabilidade	9/16	3/16	3/16	1/16

Uma amostra de **556 ervilhas** resultantes de cruzamentos de ervilhas amarelas redondas com ervilhas verdes enrugadas foi classificada da seguinte forma:

Resultado	Amarela redonda	Amarela enrugada	Verde redonda	Verde enrugada
Frequência observada	315	101	108	32

⇨ Há evidências de que os resultados desse experimento estão de acordo com a distribuição de probabilidades proposta por Mendel?

4 categorias para os resultados dos cruzamentos:

Amarelas redondas (AR), Amarelas enrugadas (AE), Verdes redondas (VR), Verdes enrugadas (VE).

Segundo Mendel, a probabilidade de cada categoria é dada por:

Probabilidades:	AR	AE	VR	VE
(de Mendel)	9/16	3/16	3/16	1/16

No experimento, 556 ervilhas foram classificadas segundo o tipo de resultado, fornecendo a tabela a seguir:

Tipo de resultado	Frequência observada
AR	315
AE	101
VR	108
VE	33
Total	556

Objetivo: Verificar se o modelo probabilístico proposto é adequado aos resultados do experimento.

Se o modelo probabilístico for adequado, a ***frequência esperada*** de ervilhas do tipo $\boldsymbol{AR}$, dentre as 556 observadas, pode ser calculada por:

$$556 \times P(AR) = 556 \times \mathbf{9/16} = 312{,}75$$

Da mesma forma, temos para o tipo $\boldsymbol{AE}$,

$$556 \times P(AE) = 556 \times \mathbf{3/16} = 104{,}25$$

Para o tipo $\boldsymbol{VR}$ temos

$$556 \times P(VR) = 556 \times \mathbf{3/16} = 104{,}25$$

E para o tipo $\boldsymbol{VE}$,

$$556 \times P(VE) = 556 \times \mathbf{1/16} = 34{,}75$$

Podemos expandir a tabela de frequências dada anteriormente:

Tipo de resultado	Frequência observada	Frequência esperada (por Mendel)
AR	315	312,75
AE	101	104,25
VR	108	104,25
VE	32	34,75
Total	556	556

$\rightarrow$ Pergunta: Podemos afirmar que os valores observados estão suficientemente próximos dos valores esperados, de tal forma que o modelo probabilístico proposto por Mendel é adequado aos resultados desse experimento?

Testes de Aderência – Metodologia

Considere uma tabela de frequências, com $k \geq 2$ categorias de resultados:

Categorias	Frequência Observada
1	O_1
2	O_2
3	O_3
⋮	⋮
k	O_k
Total	n

em que O_i é o total de indivíduos ***observados*** na categoria i, $i = 1,\ldots,k$.

Seja p_i a probabilidade associada à categoria i, $i = 1,..., k$.

O objetivo do teste de aderência é testar as hipóteses

$$H_0: p_1 = p_{o1}\ ,\quad \ldots\ ,\ p_k = p_{ok}$$

H_1 : existe pelo menos uma diferença

sendo $\boldsymbol{p_{oi}}$ a probabilidade especificada para a categoria i, $i = 1, ..., k$, **fixada através do modelo probabilístico de interesse**.

Se $\boldsymbol{E_i}$ é o total de indivíduos ***esperados*** na categoria i, quando a hipótese H_0 é verdadeira, então:

$$E_i = n \times p_{oi},\ i = 1, ...,k$$

Expandindo a tabela de frequências original, temos

Categorias	**Frequência observada**	**Frequência esperada, sob H_0**
1	O_1	E_1
2	O_2	E_2
3	O_3	E_3
⋮	⋮	⋮
k	O_k	E_k
Total	n	n

Quantificação da distância entre as colunas de frequências:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$ ← Estatística do teste de aderência

Supondo H_0 verdadeira,

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \sim \chi^2_q, \quad \text{aproximadamente,}$$

sendo que $q = k$ - 1 representa o número de graus de liberdade.

→ Em outras palavras, se H_0 é verdadeira, a v.a. χ^2 tem distribuição aproximada qui-quadrado com q graus de liberdade.

IMPORTANTE.: Este resultado é válido para ***n grande*** e para

$E_i \geq 5$, $i = 1, \ldots, k$.

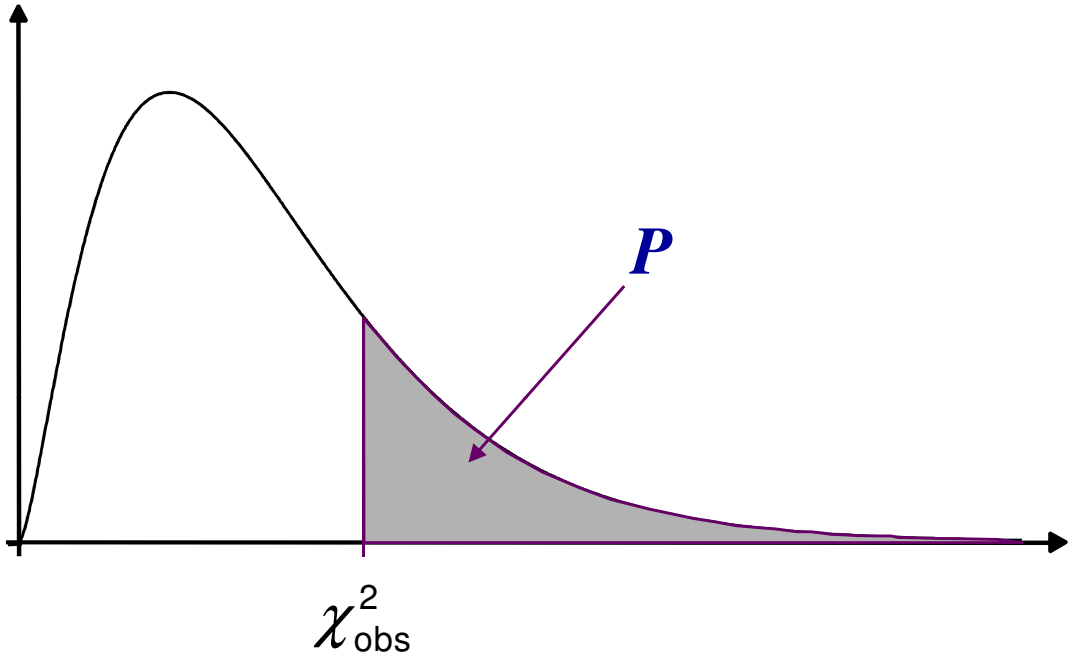
Regra de decisão:

Pode ser baseada no **nível descritivo** ou **valor** P, neste caso

$$P = P\,(\,\chi^2_q \geq \chi^2_{obs}\,),$$

em que χ^2_{obs} é o valor calculado, a partir dos dados, usando a expressão apresentada para χ^2.

Graficamente:



Se, para α fixado, obtemos $P \leq \alpha$, **rejeitamos a hipótese** H_0.

Exemplo (continuação): **Cruzamentos de ervilhas**

Hipóteses:

H_0: O modelo probabilístico proposto por Mendel é adequado.

H_1: O modelo proposto por Mendel não é adequado.

De forma equivalente, podemos escrever:

H_0: $P(AR)$ =9/16; $P(AE)$ = 3/16; $P(VR)$ = 3/16; $P(VE)$ = 1/16.

H_1: ao menos uma das igualdades não se verifica.

A tabela seguinte apresenta os valores observados e esperados (calculados anteriormente).

Resultado	O_i	E_i
AR	315	312,75
AE	101	104,25
VR	108	104,25
VE	32	34,75
Total	556	556

Cálculo do valor da estatística do teste ($k = 4$):

$$\chi^2_{obs} = \sum_1^4 \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = \frac{(315-312{,}75)^2}{312{,}75} + \frac{(101-104{,}25)^2}{104{,}25} + \frac{(108-104{,}25)^2}{104{,}25} + \frac{(32-34{,}75)^2}{34{,}75} =$$

$$= 0{,}016 + 0{,}101 + 0{,}135 + 0{,}218 = 0{,}470.$$

Usando a distribuição de qui-quadrado com $q = k$-1 = 3 graus de liberdade, o nível descritivo é calculado por $P = P(\chi^2_3 \geq 0{,}470) = 0{,}925$.

➡ Conclusão: Para α = 0,05, como P **= 0,925 > 0,05**, não há evidências para rejeitarmos a hipótese H_0, isto é, ao nível de significância de 5%, concluímos o modelo de probabilidades de Mendel se aplica aos resultados do experimento.

O cálculo do ***nível descritivo P*** pode ser feito no ***Rcmdr***, via menu, através do seguinte caminho:

Distribuições → Distribuições contínuas → Distribuição Qui-Quadrado → Probabilidades da Qui-Quadrado → Cauda Superior

Inserindo o **valor 0,470** e o número de **graus de liberdade igual a 3**, o valor ***P*** será igual a **0,925431**.

Exemplo 2: Deseja-se verificar se o número de acidentes em uma estrada muda conforme o dia da semana. O número de acidentes observado para cada dia de uma semana escolhida aleatoriamente foram:

Dia da semana	No. de acidentes
Seg	20
Ter	10
Qua	10
Qui	15
Sex	30
Sab	20
Dom	35

$\Rightarrow$ O que pode ser dito?

Hipóteses a serem testadas:

H_0: O número de acidentes não muda conforme o dia da semana;

H_1: Pelo menos um dos dias tem número diferente dos demais.

Se p_i representa a probabilidade de ocorrência de acidentes no i-ésimo dia da semana,

H_0: $p_i = 1/7$ para todo $i = 1,\ldots, 7$
H_1: $p_i \neq 1/7$ para pelo menos um valor de i.

Total de acidentes na semana: $n = 140$.

Logo, se H_0 for verdadeira,

$$E_i = 140 \times 1/7 = 20,\ i = 1,\ldots,7,$$

ou seja, esperamos 20 acidentes por dia.

Dia da semana	Nº. de acidentes observados (O_i)	Nº. esperado de acidentes (E_i)
Seg	20	20
Ter	10	20
Qua	10	20
Qui	15	20
Sex	30	20
Sab	20	20
Dom	35	20

Cálculo da estatística de qui-quadrado:

$$\chi^2_{obs} = \sum_1^7 \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = \frac{(20-20)^2}{20} + \frac{(10-20)^2}{20} + \frac{(10-20)^2}{20} + \frac{(15-20)^2}{20} +$$

$$\frac{(30-20)^2}{20} + \frac{(20-20)^2}{20} + \frac{(35-20)^2}{20}$$

$$= 0 + 5 + 5 + 1{,}25 + 5 + 0 + 11{,}25 = 27{,}50$$

Neste caso, temos $\chi^2 \sim \chi^2_6$, aproximadamente.

O nível descritivo é dado por $P = \mathrm{P}(\chi^2_6 \geq 27{,}50) \cong 0{,}00012$,

que pode ser obtido no ***Rcmdr*** pelo caminho (via menu):

Distribuições → Distribuições contínuas → Distribuição Qui-Quadrado → Probabilidades da Qui-Quadrado → Cauda Superior

(inserindo o valor 27,50 e o número de graus de liberdade igual a 6).

Conclusão: Para $\alpha = 0{,}05$, temos que P **= 0,0001 <** α**.**

Assim, há evidências para **rejeitarmos** H_0, ou seja, concluímos ao nível de significância de 5% que o número de acidentes não é o mesmo em todos os dias da semana.

2. Testes de Independência

Objetivo: Verificar se existe independência entre duas variáveis medidas nas mesmas unidades experimentais.

Exemplo 3: Uma grande empresa de comunicação no Brasil fez um levantamento com 1300 usuários de seus recursos midiáticos, para verificar se a preferência por um determinado canal de informação para se interar de notícias é independente do nível de instrução do indivíduo. Os resultados obtidos foram:

	Tipo de mídia				
Grau de instrução	**Internet**	**TV**	**Rede Social**	**Outras**	**Total**
Fundamental	10	27	5	8	50
Médio	90	73	125	162	450
Superior	200	130	220	250	800
Total	300	230	350	420	1300

Vamos calcular *proporções segundo os totais das colunas* (poderiam também ser calculadas pelos totais das linhas). Temos a seguinte tabela:

	Tipo de mídia				
Grau de instrução	**Internet**	**TV**	**Rede Social**	**Outras**	**Total**
Fundamental	3,33%	11,74%	1,90%	1,43%	3,85%
Médio	30,00%	31,74%	38,57%	35,71%	34,62%
Superior	66,67%	56,52%	59,52%	62,86%	61,54%
Total	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%

⇒ O que representam as porcentagens na colunas?

Distribuição de grau de instrução por tipo de mídia.

⇒ Independentemente da preferência por um tipo de mídia:

3,85% dos usuários têm ensino fundamental,

34,62% têm ensino médio e

61,54% têm ensino superior.

Sob independência entre grau de instrução e preferência por um tipo de mídia, o número esperado de usuários que têm:

- **Fundam. e preferem Internet** é igual a 300x0,0385=**11,54**(=300x50/1300),
- **Médio e preferem Internet** é 300x0,3462=**103,85** (=300x450/1300),
- **Superior e preferem Internet** é 300x0,6154=**184,62** (=300x800/1300).

	Tipo de mídia				
Grau de instrução	**Internet**	**TV**	**Rede Social**	**Outras**	**Total**
Fundamental	10 **11,54** **(3,85%)**	27 **8,85** **(3,85%)**	5 **13,46** **(3,85%)**	8 **16,15** **(3,85%)**	**50** (3,85%)
Médio	90 **103,85** **(34,62)%**	73 **79,62** **(34,62%)**	125 **121,15** **(34,62%)**	162 **145,38** **(34,62%)**	**450** (34,62%)
Superior	200 **184,62** **(61,54%)**	130 **141,54** **(61,54%)**	220 **215,38** **(61,54%)**	250 **258,46** **(61,54%)**	**800** (61,54%)
Total	300	230	350	420	1300

As diferenças entre os valores observados e os esperados não são muito pequenas. Preferência por um tipo de mídia e grau de instrução parecem não ser *independentes*.

Testes de Independência – Metodologia

Em geral, os dados referem-se a mensurações de duas características (A e B) feitas em n unidades experimentais, que são apresentadas conforme a seguinte tabela:

$A \setminus B$	B_1	B_2	...	B_s	**Total**
A_1	O_{11}	O_{12}	...	O_{1s}	$O_{1.}$
A_2	O_{21}	O_{22}	...	O_{2s}	$O_{2.}$
...	...	...	...	...	...
A_r	O_{r1}	O_{r2}	...	O_{rs}	$O_{r.}$
Total	$O_{.1}$	$O_{.2}$	...	$O_{.s}$	n

Hipóteses a serem testadas – **Teste de independência:**

H_0: A e B são variáveis independentes

H_1: As variáveis A e B não são independentes

→ Quantas observações devemos esperar em cada casela, se A e B forem independentes?

$$E_{ij} = \frac{O_{i.} \times O_{.j}}{n}$$

Distância entre os valores observados e os valores esperados sob a suposição de independência:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{r} \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}}$$

Supondo H_0 verdadeira,

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}} \sim \chi^2_q$$

aproximadamente, sendo $\boldsymbol{q = (r-1)\times(s-1)}$ o número de **graus de liberdade**.

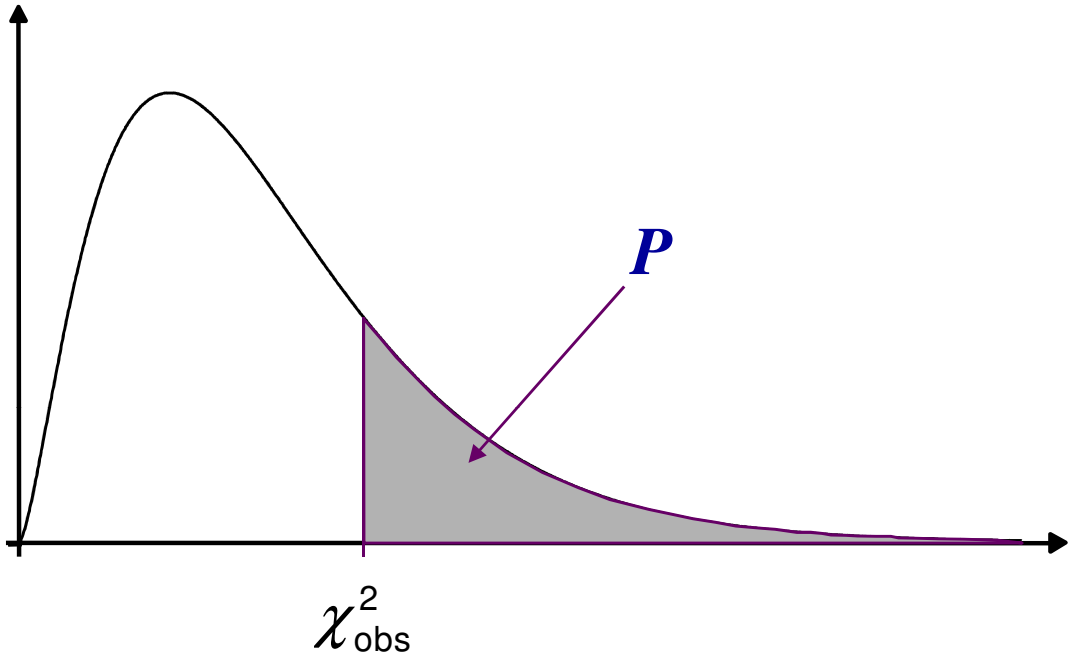
Regra de decisão:

Pode ser baseada no **valor P** (nível descritivo), neste caso

$$P = P(\chi^2_q \geq \chi^2_{obs}),$$

em que χ^2_{obs} é o valor calculado, a partir dos dados, usando a expressão apresentada para χ^2 .

Graficamente:



Se, para α fixado, obtemos $P \leq \alpha$, **rejeitamos a hipótese H_0 de independência.**

Exemplo 3 (continuação): Estudo da independência entre preferência por um tipo de mídia e grau de instrução. 1300 usuários foram entrevistados ao acaso.

Hipóteses: H_0: As variáveis preferência por um tipo de mídia e grau de instrução são independentes.

H_1: Existe dependência entre as variáveis.

Tabela de valores observados

	Tipo de mídia				
Grau de instrução	**Internet**	**TV**	**Rede social**	**Outras**	**Total**
Fundamental	**10**	27	5	8	**50**
Médio	90	73	125	162	450
Superior	200	130	220	250	800
Total	**300**	230	350	420	**1300**

→ Exemplo do cálculo dos valores esperados sob H_0 (independência):

- Número esperado de usuários que têm fundamental e preferem internet:

$$E_{11} = \frac{300 \times 50}{1300} = 11{,}54$$

Tabela de valores observados e esperados (entre parênteses)

	TIPO DE MÍDIA				
GRAU DE INSTRUÇÃO	**Internet**	**TV**	**Rede social**	**Outras**	**Total**
Fundamental	**10** (11,54)	**27 (8,85)**	**5** (13,46)	**8 (16,15)**	**50**
Médio	**90** (103,85)	**73** **(79,62)**	**125** (121,15)	**162 (145,38)**	**450**
Superior	**200** (184,62)	**130 (141,54)**	**220** (215,38)	**250** **(258,46)**	**800**

Médio e prefere TV:

$$E_{22} = \frac{230 \times 450}{1300} = 79{,}62$$

Superior e prefere outras mídias:

$$E_{34} = \frac{420 \times 800}{1300} = 258{,}46$$

Lembre-se:

$$E_{ij} = \frac{O_{i.} \times O_{.j}}{n_{..}}$$

Cálculo da estatística de qui-quadrado:

	Tipo de Mídia				
Grau de instrução	Internet	TV	Rede social	Outras	Total
Fundamental	10 (11,54)	27 (8,85)	5 (13,46)	8 (16,15)	50
Médio	90 (103,85)	73 (79,62)	125 (121,15)	162 (145,38)	450
Superior	200 (184,62)	130 (141,54)	220 (215,38)	250 (258,46)	800
Total	300	230	350	420	1300

$$\chi^2_{obs} = \frac{(10-11{,}54)^2}{11{,}54} + \frac{(27-8{,}85)^2}{8{,}85} + \frac{(5-13{,}46)^2}{13{,}46} + \frac{(8-16{,}15)^2}{16{,}15}$$

$$+ \frac{(90-103{,}85)^2}{103{,}85} + \frac{(73-79{,}62)^2}{79{,}62} + \frac{(125-121{,}15)^2}{121{,}15} + \frac{(162-145{,}38)^2}{145{,}38}$$

$$+ \frac{(200-184{,}62)^2}{184{,}62} + \frac{(130-141{,}54)^2}{141{,}54} + \frac{(220-215{,}38)^2}{215{,}38} + \frac{(250-258{,}46)^2}{258{,}46}$$

$$= 0{,}21 + 37{,}25 + 5{,}32 + 4{,}12 + 1{,}85 + 0{,}55 + 0{,}12 + 1{,}90 + 1{,}28 + 0{,}94 + 0{,}10 + 0{,}28$$

$$= 53{,}91.$$

Determinação do **número de graus de liberdade:**

- Categorias de Grau de instrução: $s = 3$
- Categorias de Tipo de mídia: $r = 4$

$\Longrightarrow$ $q = (r-1)\times(s-1) = 3\times 2 = 6$

O nível descritivo (valor P): $P = P(\chi^2_6 \geq 53{,}910) < 0{,}0001$

Supondo $\alpha = 0{,}05$, temos $P < \alpha$.

Assim, temos evidências para rejeitar a independência entre as variáveis grau de instrução e preferência por tipo de mídia para informação, ao nível de 5% de significância, i.é, a preferência por uma mídia depende do grau de instrução do usuário.

Os cálculos podem ser feitos diretamente no *Rcmdr*:

Estatísticas → Tabelas de Contingência → Digite e analise tabela de dupla entrada

Saída do *Rcmdr*:

```
data:  .Table
X-squared = 53.9099, df = 6, p-value = 7.692e-10


> .Test$expected # Expected Counts
         net         tv     re_soc      outras
1   11.53846   16.15385   13.46154    8.846154
2  103.84615  145.38462  121.15385   79.615385
3  184.61538  258.46154  215.38462  141.538462

> round(.Test$residuals^2, 2) # Chi-square Components
    net     tv  re_soc  outras
1  0.21  37.25    5.32    4.12
2  1.85   0.55    0.12    1.90
3  1.28   0.94    0.10    0.28
```

Exemplo 4: 1237 indivíduos adultos classificados segundo a pressão sanguínea ($mm\ Hg$) e o nível de colesterol ($mg/100cm^3$).

Verificar se existe independência entre essas variáveis.

Colesterol	Pressão			Total
	< 127	127 a 166	> 166	
< 200	117	168	22	307
200 a 260	204	418	63	685
> 260	67	145	33	245
Total	388	731	118	1237

Hipóteses:

H_0: Pressão sanguínea e nível de colesterol são independentes;

H_1: Nível de colesterol e pressão sanguínea são variáveis dependentes

Rcmdr*: *Estatísticas* → *Tabelas de Contingência* → *Digite e analise tabela de dupla entrada

Saída do *Rcmdr*:

```
data:  .Table
X-squared = 13.5501, df = 4, p-value = 0.008878

> .Test$expected # Expected Counts
        1        2        3
1  96.29426 181.4204 29.28537
2 214.85853 404.7979 65.34357
3  76.84721 144.7817 23.37106

> round(.Test$residuals^2, 2) # Chi-square Components
     1    2    3
1 4.45 0.99 1.81
2 0.55 0.43 0.08
3 1.26 0.00 3.97
```

Para α = 0,05, temos $P < \alpha$. Assim, temos evidências para rejeitar a hipótese de independência entre as variáveis pressão sanguínea e nível de colesterol ao nível de 5% de significância.

Exemplo 5: Uma indústria, desejando melhorar o nível de seus funcionários em cargos de chefia, montou 2 cursos experimentais de inglês utilizando 2 metodologias distintas (MA, MB). Os dados referentes ao conceito obtido no curso (A, B ou C) e metodologia utilizada estão na tabela a seguir:

(a) Identifique as variáveis em estudo. Classifique-as.

(b) Construa uma tabela de contingência para as variáveis "metodologia" e "conceito".

(c) Conclua se existe associação entre essas variáveis (α = 10%).

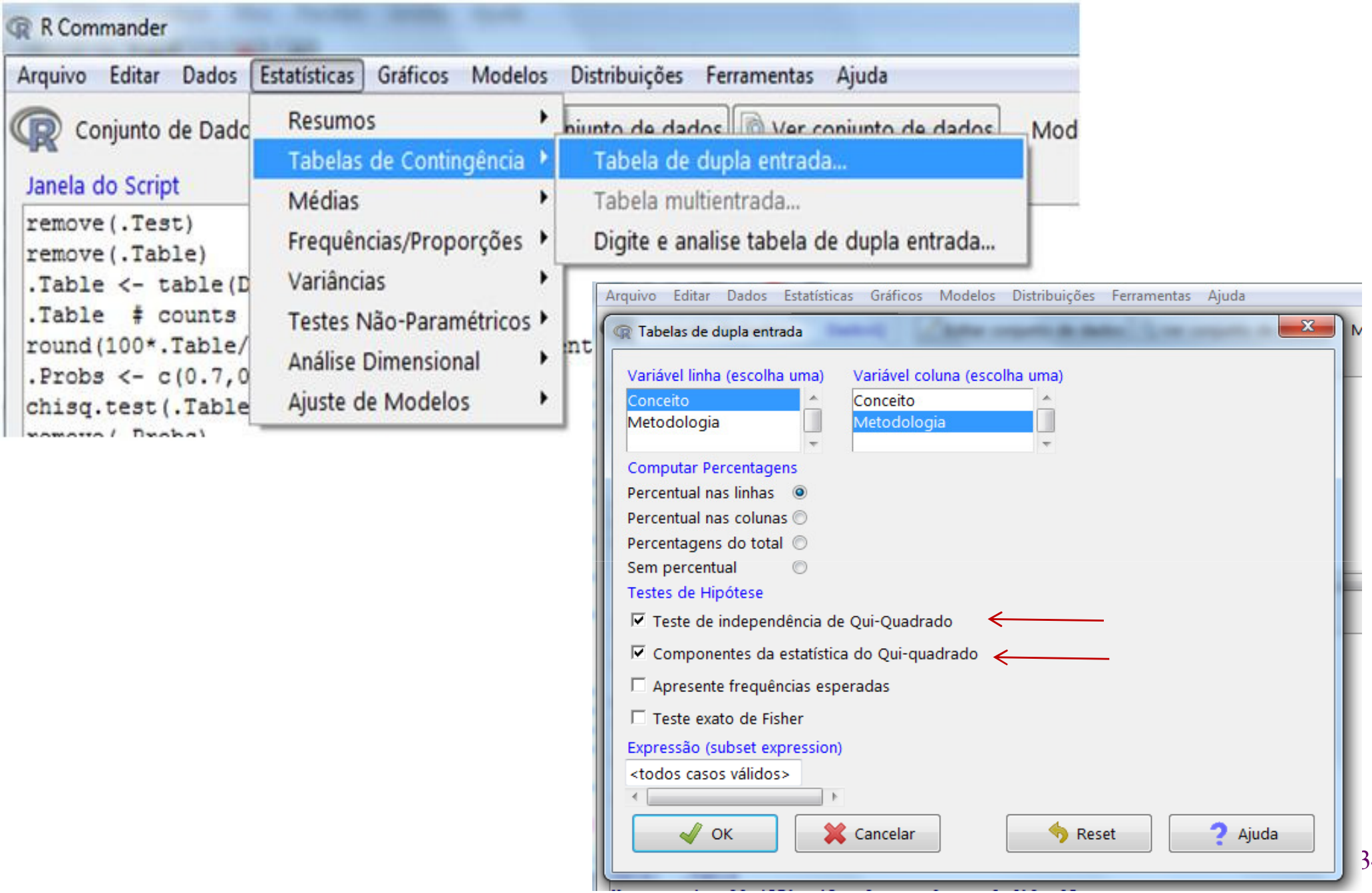
Dados:

Funcionário	Metodologia	Conceito
1	*MA*	*A*
2	*MA*	*B*
3	*MB*	*A*
4	*MB*	*B*
5	*MA*	*A*
6	*MA*	*B*
7	*MA*	*C*
8	*MB*	*B*
9	*MB*	*B*
10	*MA*	*B*
11	*MB*	*C*
12	*MB*	*A*
13	*MB*	*B*
14	*MB*	*A*
15	*MB*	*C*
16	*MA*	*A*
17	*MA*	*B*
18	*MB*	*C*
19	*MA*	*C*
20	*MB*	*C*
21	*MB*	*A*
22	*MA*	*C*
23	*MB*	*C*
24	*MA*	*A*
25	*MA*	*B*
26	*MB*	*B*
27	*MA*	*A*
28	*MB*	*C*
29	*MA*	*A*
30	*MA*	*B*
31	*MA*	*A*
32	*MA*	*A*
33	*MB*	*B*
34	*MB*	*B*
35	*MA*	*A*
36	*MA*	*A*
37	*MA*	*A*
38	*MB*	*B*
39	*MB*	*C*
40	*MB*	*C*

Variáveis:

- Metodologia: qualitativa nominal
- Conceito: qualitativa ordinal

Rcmdr: Construção da tabela de contingência (ou tabela de frequencias conjuntas)



Saída do *Rcmdr*:

```
> .Table                    Metodologia
                  Conceito MA  MB
                         A   11   4
                         B    6   8
                         C    3   8
> rowPercents(.Table) # Row Percentages
                  Metodologia
        Conceito  MA   MB    Total Count
           A      73.3 26.7   100    15
           B      42.9 57.1   100    14
           C      27.3 72.7   100    11

X-squared = 5.8251, df = 2, p-value = 0.05434
> round(.Test$residuals^2, 2) # Chi-square Components
                 Metodologia
       Conceito  MA   MB
           A     1.63 1.63
           B     0.14 0.14
           C     1.14 1.14
```

Para α = 0,10, temos $P < \alpha$, então, H_0 é rejeitada, ou seja, os dados indicam que o conceito no curso depende da metodologia de ensino, ao nível de 10% de significância.