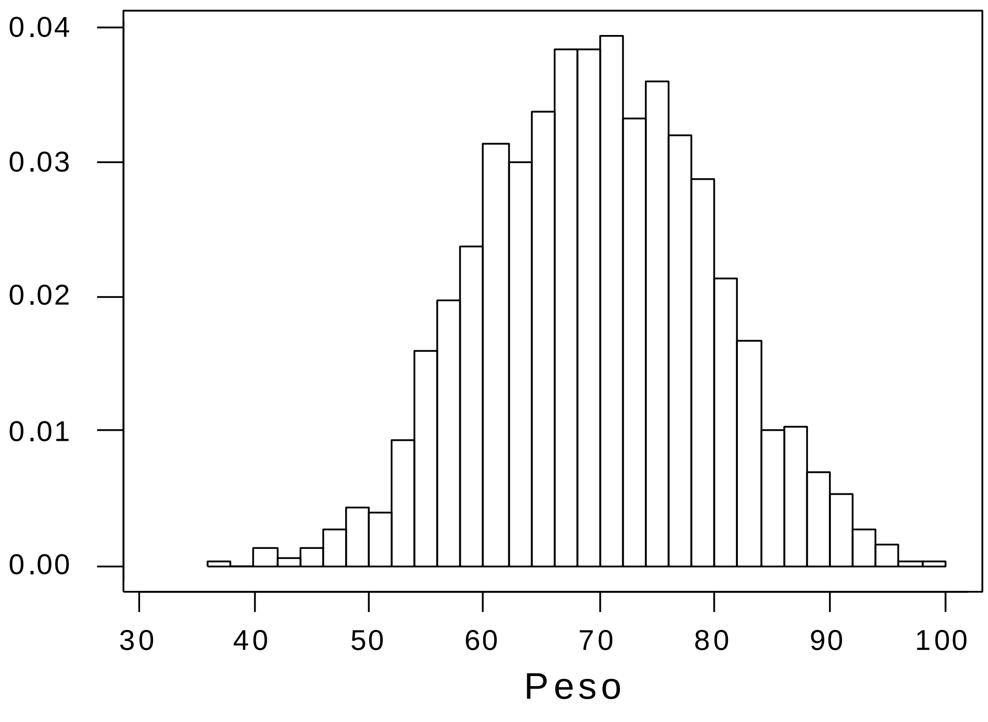
DISTRIBUIÇÃO NORMAL

Introdução

Exemplo : Observamos o peso, em *kg*, de 1500 pessoas adultas selecionadas, ao acaso, em uma população.

O histograma por densidade dos pesos é o seguinte:



A análise do histograma indica que:

- a distribuição dos valores é, aproximadamente, simétrica em torno de 70 kg;

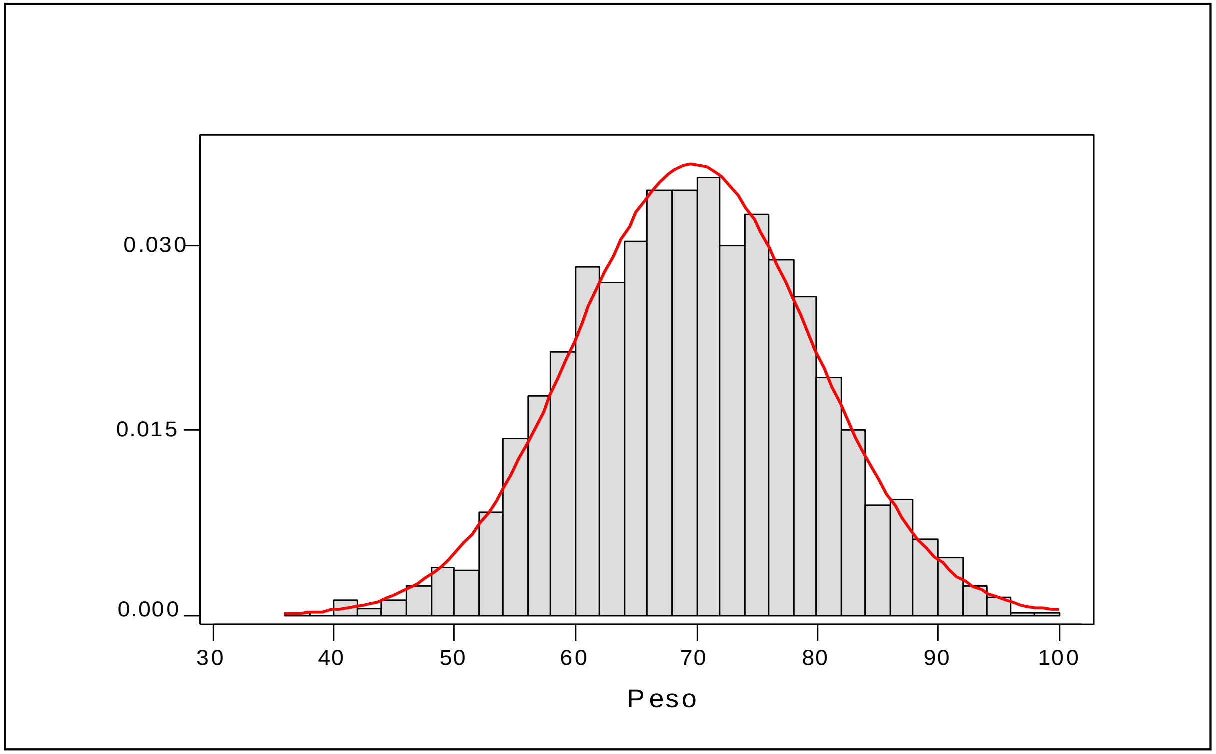
- a maioria dos valores (88%) encontra-se no intervalo (55;85);

- existe uma pequena proporção de valores abaixo de 48 kg (1,2%) e acima de 92 kg (1%).

Vamos definir a variável aleatória

X: peso, em kg, de uma pessoa adulta escolhida, ao acaso, **da população**.

Como se distribuem os valores da variável aleatória X, isto é, qual é a **distribuição de probabilidades** de X ?



A curva contínua da figura denomina-se ***curva Normal*** (ou ***curva de Gauss***).

A distribuição Normal é uma das mais importantes distribuições contínuas de probabilidade pois:

- Muitos fenômenos aleatórios comportam-se próximos a essa distribuição:
    1. altura;
    2. pressão sangüínea;
    3. Peso

    etc...

- Pode ser utilizada para calcular, de forma aproximada, probabilidades para outras distribuições, como por exemplo, para a distribuição binomial.

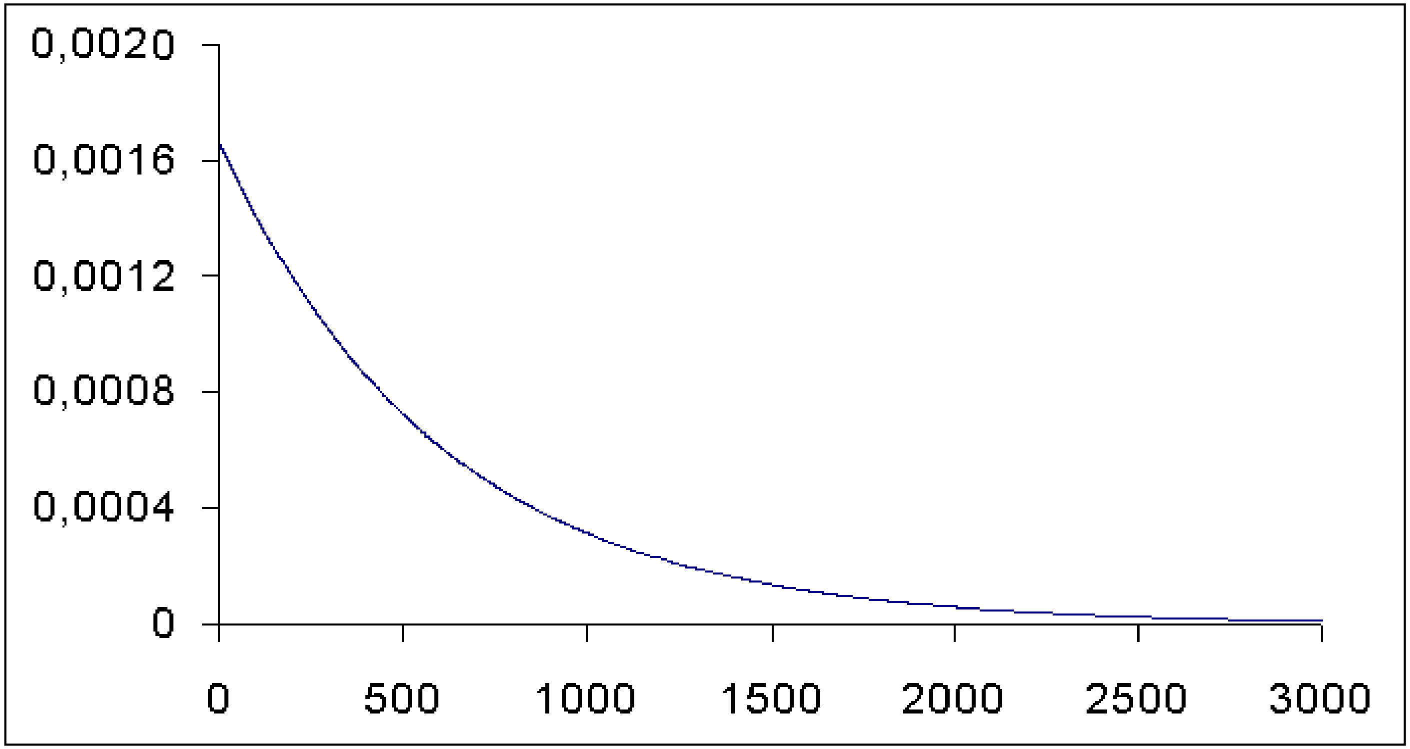
→ O modelo normal de probabilidade foi desenvolvido por ***Carl Friedrich Gauss***

Nem todos os fenômenos se ajustam à distribuição Normal.

Exemplo: Considere a variável

Y: Duração, em horas, de uma lâmpada de certa marca, selecionada ao acaso.

A experiência sugere que esta distribuição deve ser *assimétrica* - grande proporção de valores entre 0 e 500 horas e pequena proporção de valores acima de 1500 horas.



Modelos Contínuos de Probabilidade

Variável Aleatória Contínua

- Assume valores num intervalo de números reais.
- Não é possível listar, individualmente, todos os possíveis valores da variável aleatória contínua.
- Associamos probabilidades a intervalos de valores da variável.

Propriedades dos modelos contínuos:

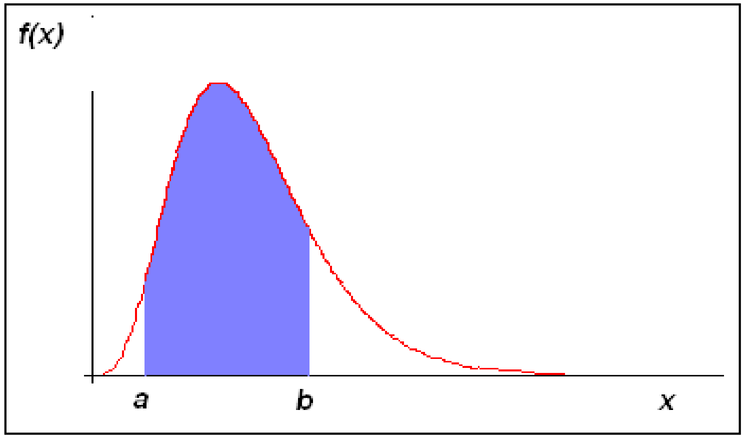
Uma *v.a.* X contínua é caracterizada por sua ***função densidade de probabilidade f(x)***, com as propriedades:

(i) A área sob a curva de densidade $f(x)$ é 1;

(ii) $P(a \leq X \leq b)$ = área sob a curva da densidade $f(x)$ e acima do eixo x, entre os pontos a e b;

(iii) $f(x) \geq 0$, para todo x;

(iv) $P(X = x_0) = 0$, para x_0 fixo.



Assim,

$$P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b).$$

A DISTRIBUIÇÃO NORMAL
(ou *Gaussiana*)

A *v. a.* X tem distribuição Normal com parâmetros μ e σ^2 se sua função densidade de probabilidade é dada por:

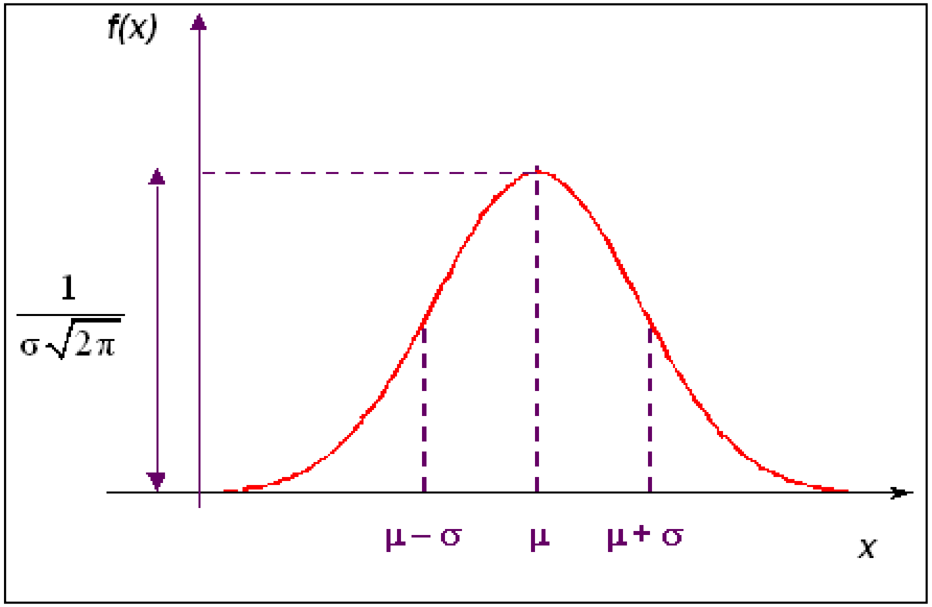
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Pode ser mostrado que:

1. μ é o valor esperado (média) de X, com $-\infty < \mu < \infty$;
2. σ^2 é a variância de X, com $\sigma^2 > 0$.

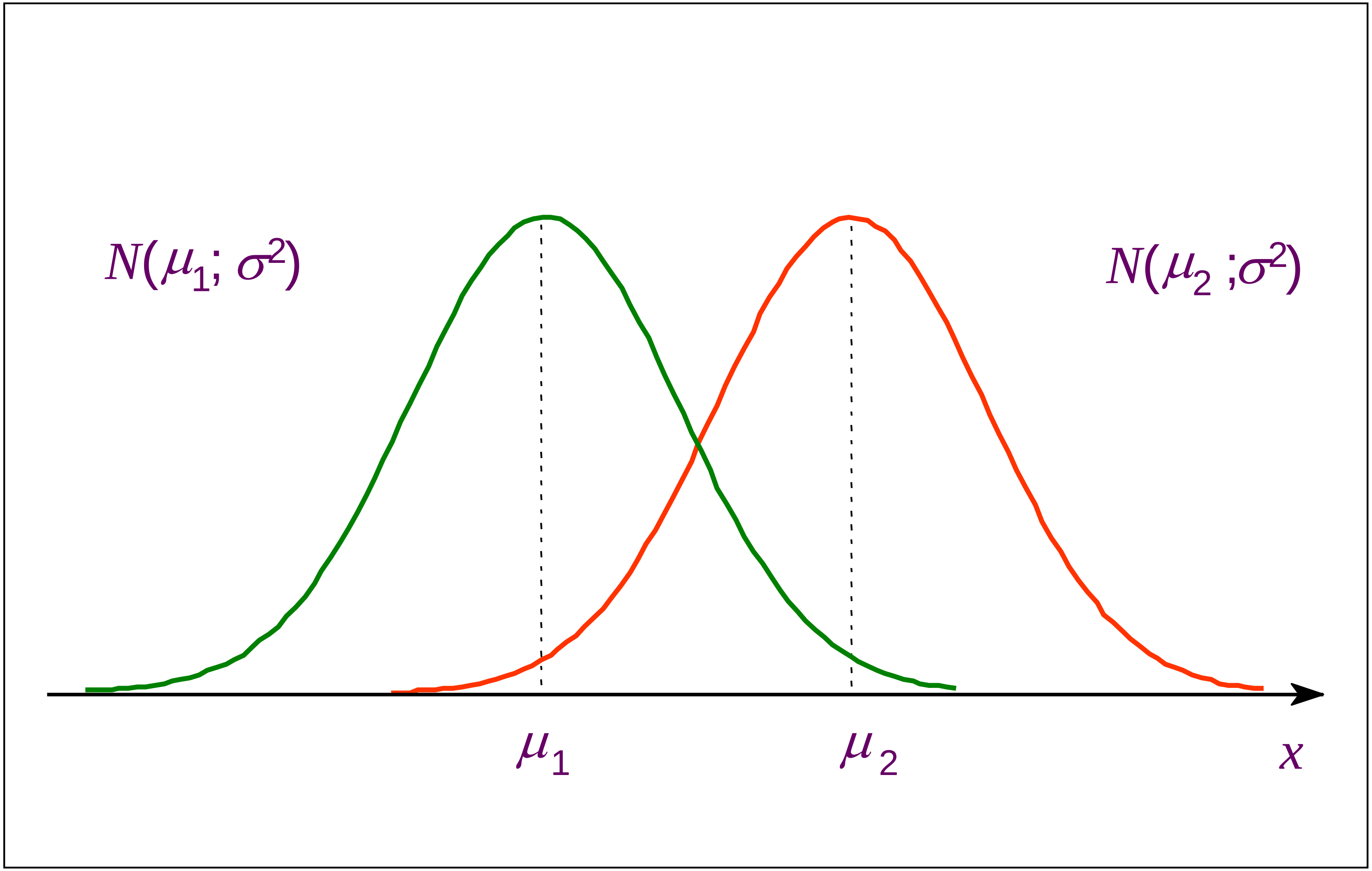
$$\boxed{\text{Notação : } X \sim N(\mu\,;\,\sigma^2)}$$

Propriedades de $X \sim N(\mu\,;\,\sigma^2)$



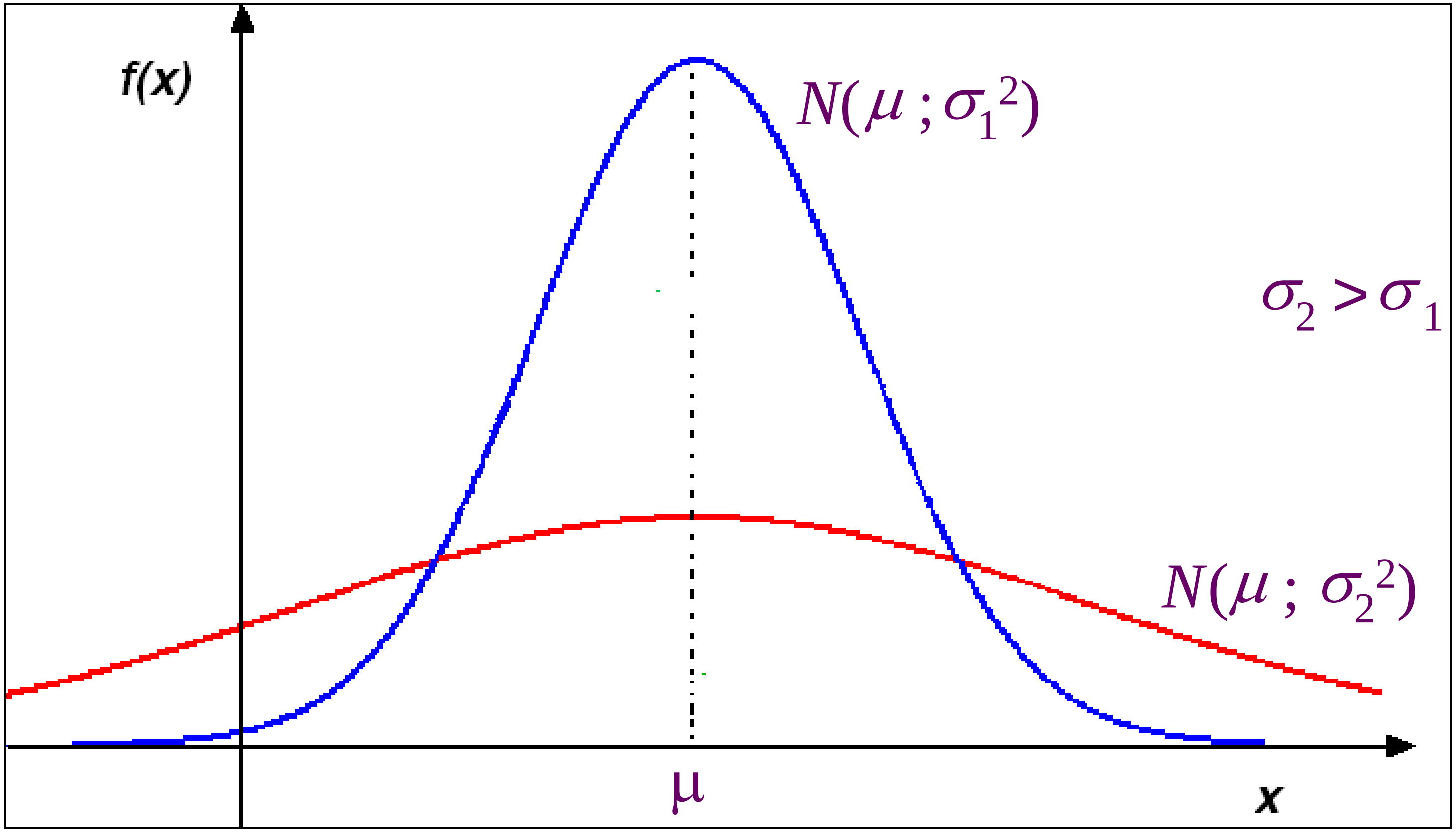
- $E(X) = \mu$ (média ou valor esperado);
- $Var(X) = \sigma^2$ (e portanto, $DP(X) = \sigma$);
- $f(x) \to 0$, quando $x \to \pm\infty$;
- $x = \mu$ é ponto de máximo de $f(x)$;
- $\mu - \sigma$ e $\mu + \sigma$ são pontos de inflexão de $f(x)$;
- a curva Normal é simétrica em torno da média μ.

A distribuição Normal depende dos parâmetros μ e σ^2



Curvas Normais com <u>mesma variância</u> σ^2
mas <u>médias diferentes</u> ($\mu_2 > \mu_1$).

Influência de σ^2 na curva Normal



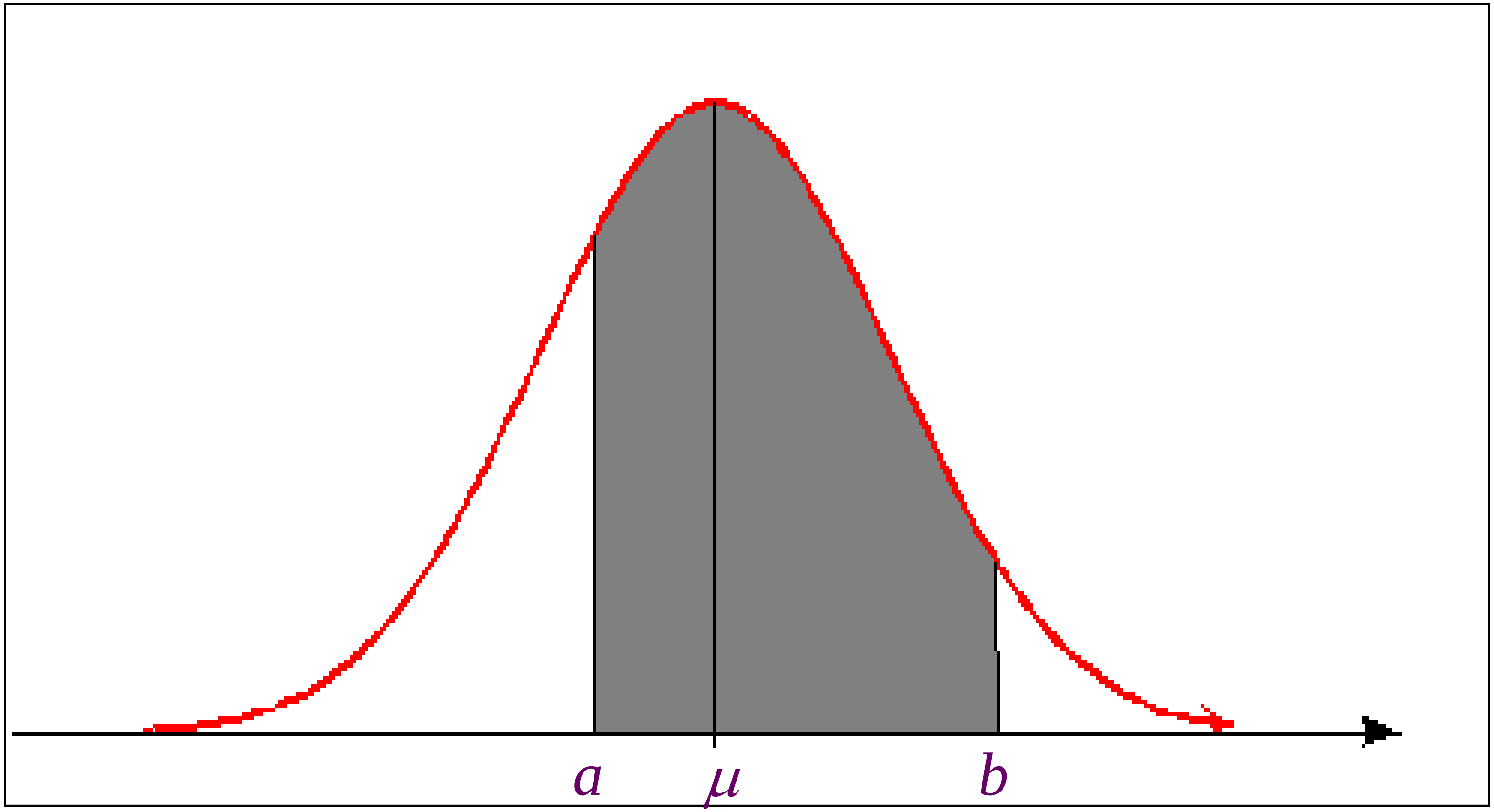
Curvas Normais com <u>mesma média μ</u>
mas com <u>variâncias diferentes</u> ($\sigma_2 > \sigma_1$).

Cálculo de probabilidades

$$P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b)$$

$\Downarrow$

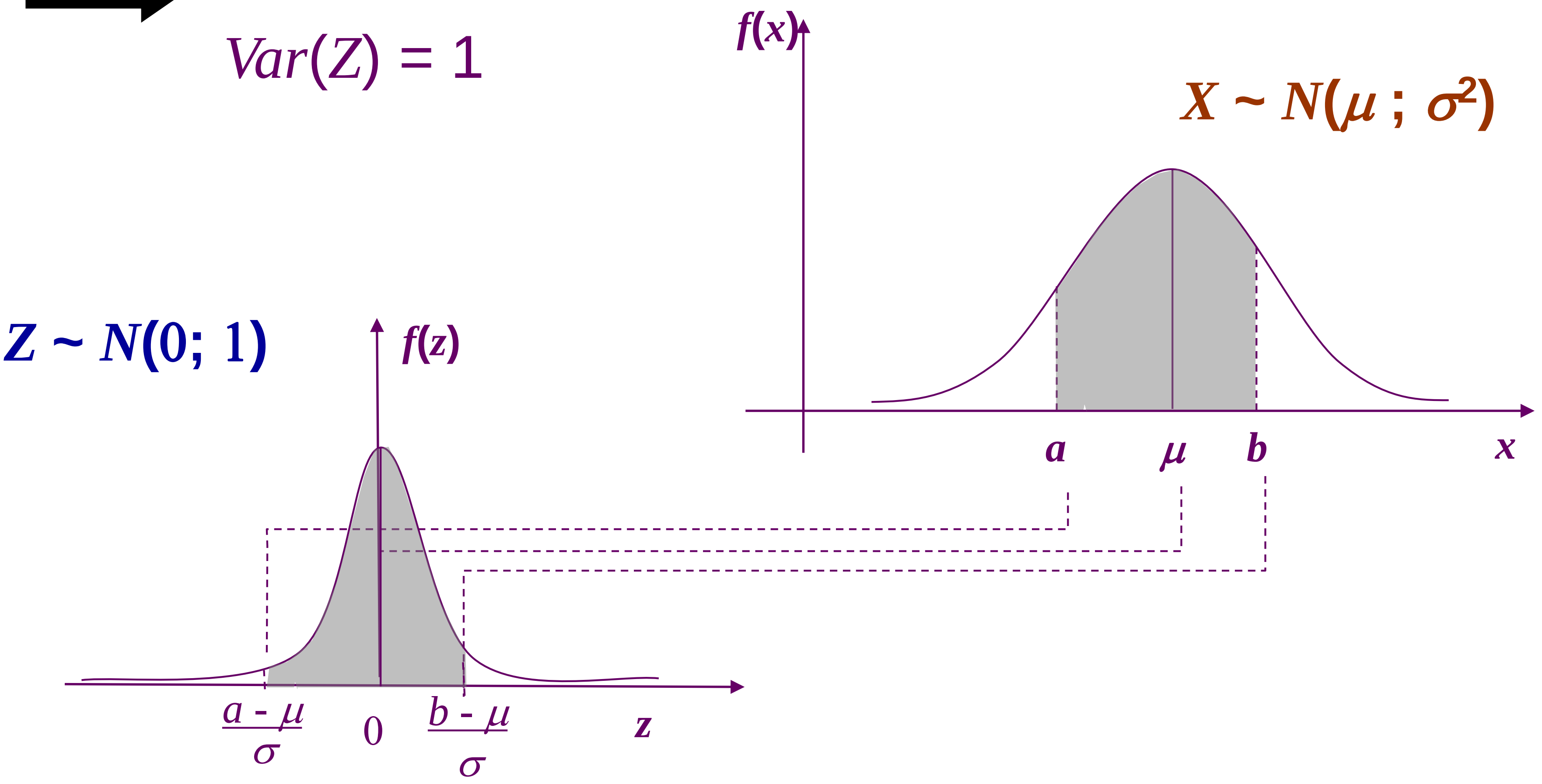
Área sob a curva e acima do eixo horizontal (x) entre a e b.



Se $X \sim N(\mu\,;\,\sigma^2)$, definimos $\boxed{Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}}$

$\Rightarrow$ $E(Z) = 0$

$Var(Z) = 1$



A *v.a.* $\boldsymbol{Z \sim N(0;1)}$ denomina-se ***normal padrão*** ou ***reduzida***.

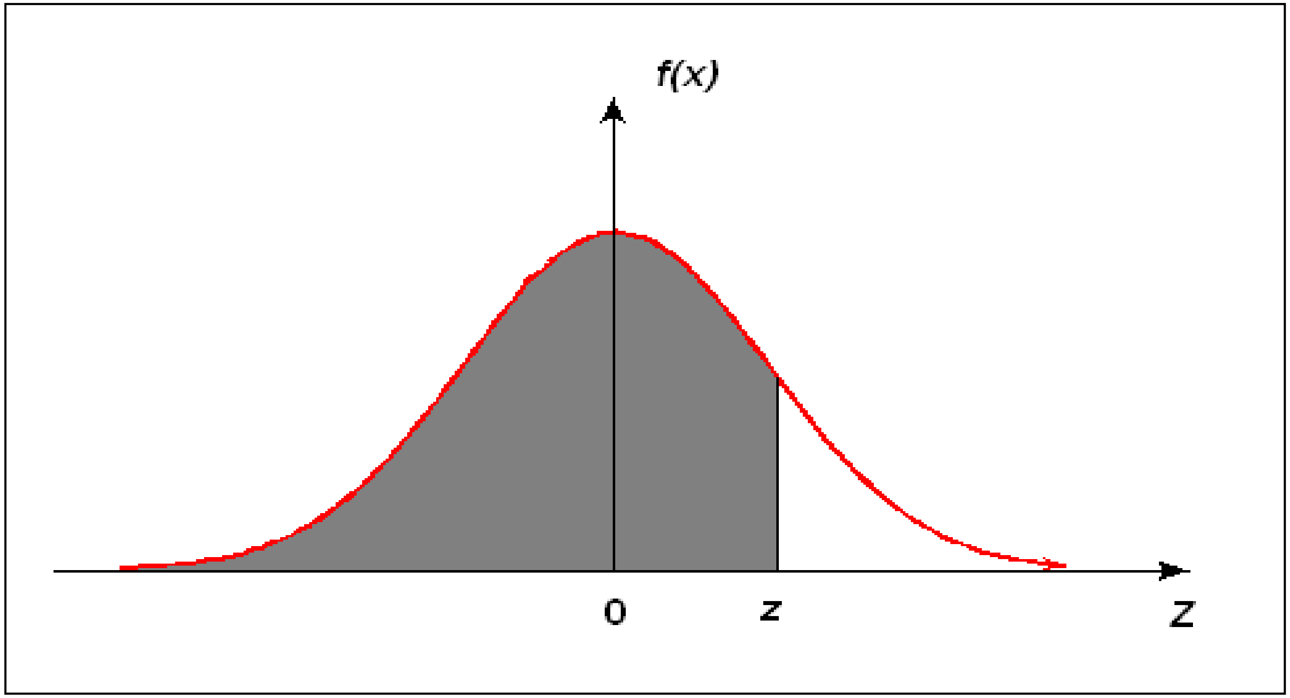
Portanto,

$$P(a < X < b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < Z < \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

Dada a *v.a.* $\boldsymbol{Z \sim N(0\,;\,1)}$ podemos obter a *v.a.* $\boldsymbol{X \sim N(\mu\,;\,\sigma^2)}$ através da transformação inversa

$$\boldsymbol{X = \mu + Z \times \sigma.}$$

USO DA TABELA NORMAL PADRÃO

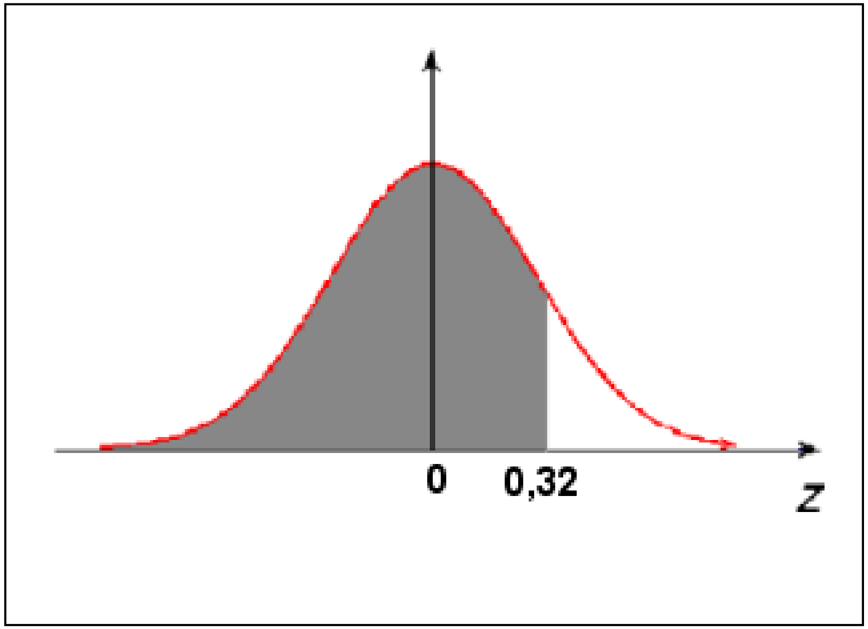


Denotamos : $\boldsymbol{A(z) = P(Z \leq z)}$, para $z \geq 0$.

Tabela

Exemplo: Seja $Z \sim N(0; 1)$, calcular

a) $P(Z \leq 0{,}32)$



$P(Z \leq 0{,}32) = A(0{,}32) = 0{,}6255.$

Tabela

Encontrando o valor na Tabela $N(0;1)$:

z	0	1	2
0,0	0,5000	0,5039	0,5079
0,1	0,5398	0,5437	0,5477
0,2	0,5792	0,5831	0,5870
0,3	0,6179	0,6217	0,6255
⋮	⋮	⋮	⋮

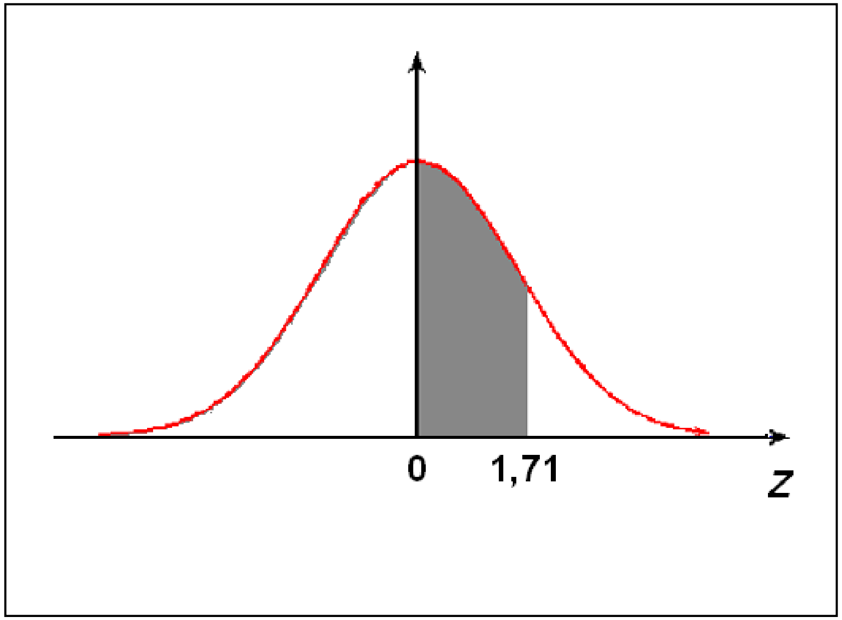
Tabela

b) $P(0 < Z \leq 1{,}71)$

$= P(Z \leq 1{,}71) - P(Z \leq 0)$

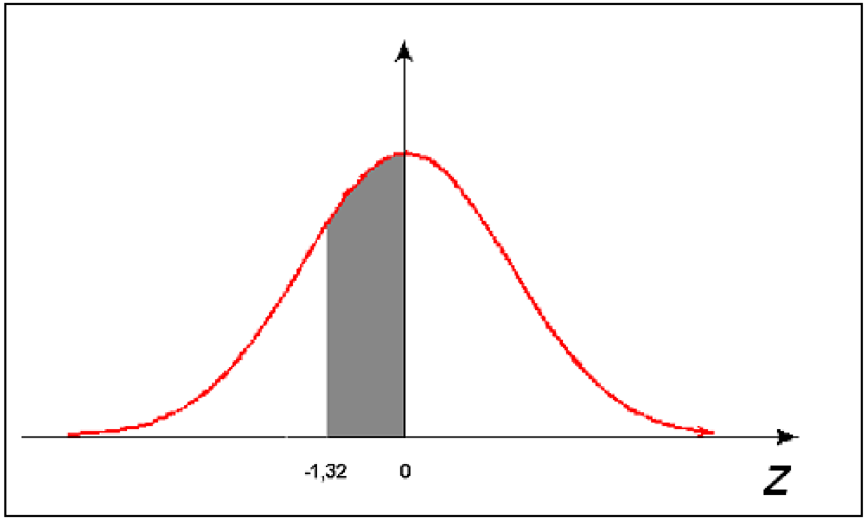
$= A(1{,}71) - A(0)$

$= 0{,}9564 - 0{,}5 = 0{,}4564.$



Obs.: $A(0)=P(Z < 0)=P(Z > 0)=0{,}5.$

c) $P(-1{,}32 < Z < 0)$ $= P(0 < Z < 1{,}32)$



$= P(Z \leq 1{,}32) - P(Z \leq 0)$

$= A(1{,}32) - 0{,}5$

$= 0{,}9066 - 0{,}5 = 0{,}4066.$

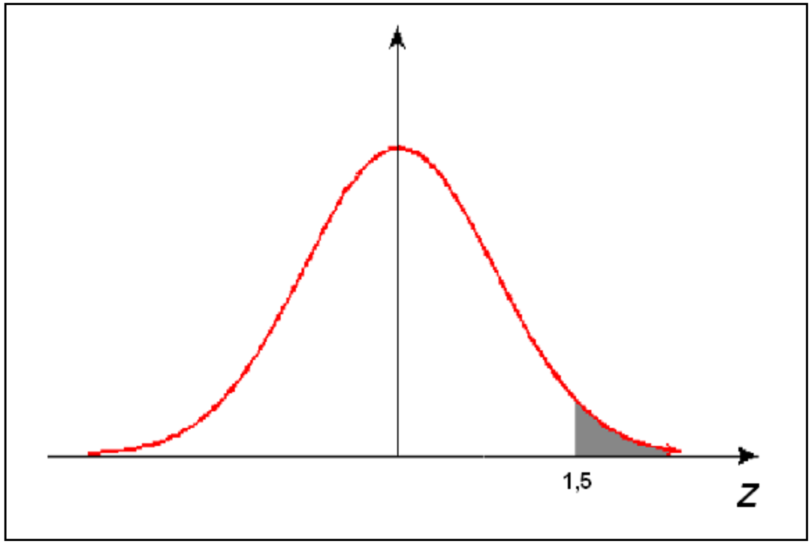
Tabela

d) $P(Z \geq 1{,}5)$

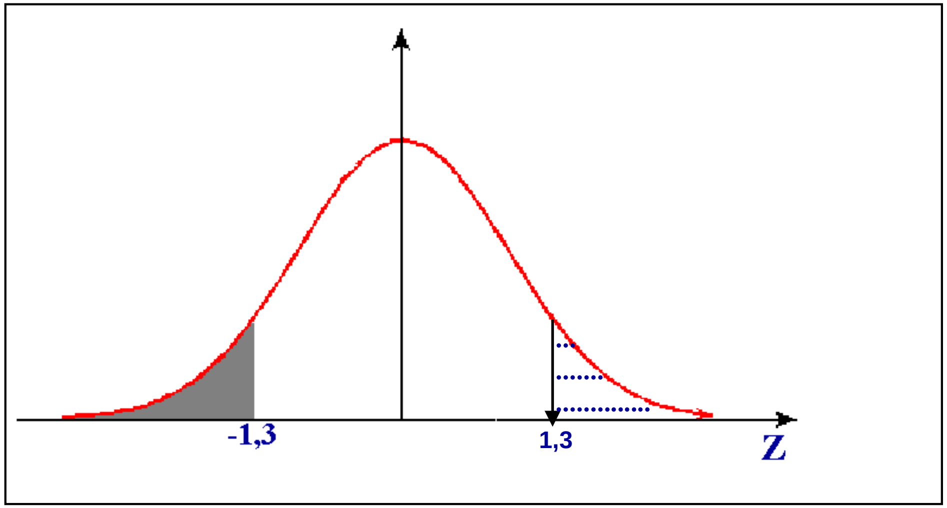
$= 1 - P(Z \leq 1{,}5)$

$= 1 - A(1{,}5)$

$= 1 - 0{,}9332 = 0{,}0668.$



e) $P(Z \leq -1{,}3)$



$= P(Z \geq 1{,}3) = 1 - P(Z \leq 1{,}3)$

$= 1 - A(1{,}3)$

$= 1 - 0{,}9032 = 0{,}0968.$

Tabela

Obs.: Pela simetria, $P(Z \leq -1{,}3) = P(Z \geq 1{,}3)$.

f) $P(-1{,}5 \leq Z \leq 1{,}5)$

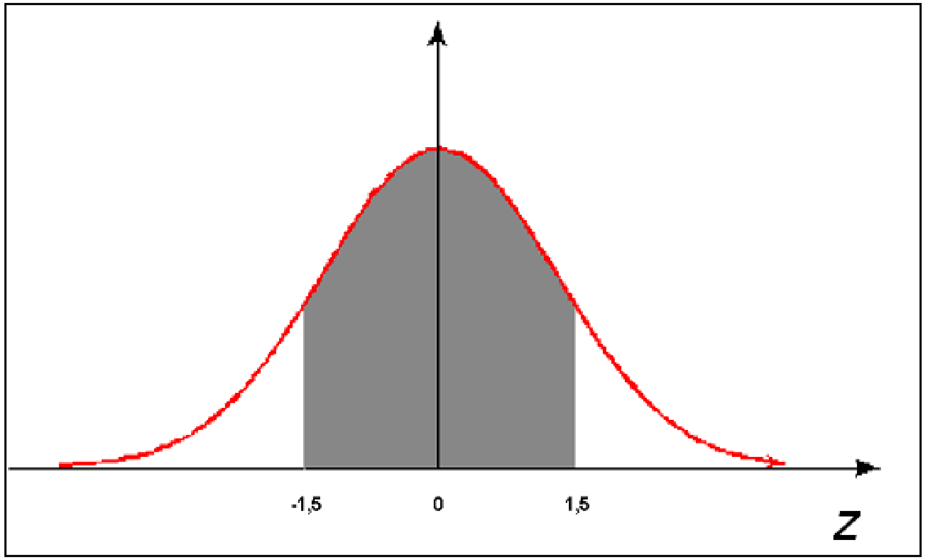
$= P(Z \leq 1{,}5) - P(Z \leq -1{,}5)$

$= P(Z \leq 1{,}5) - P(Z \geq 1{,}5)$

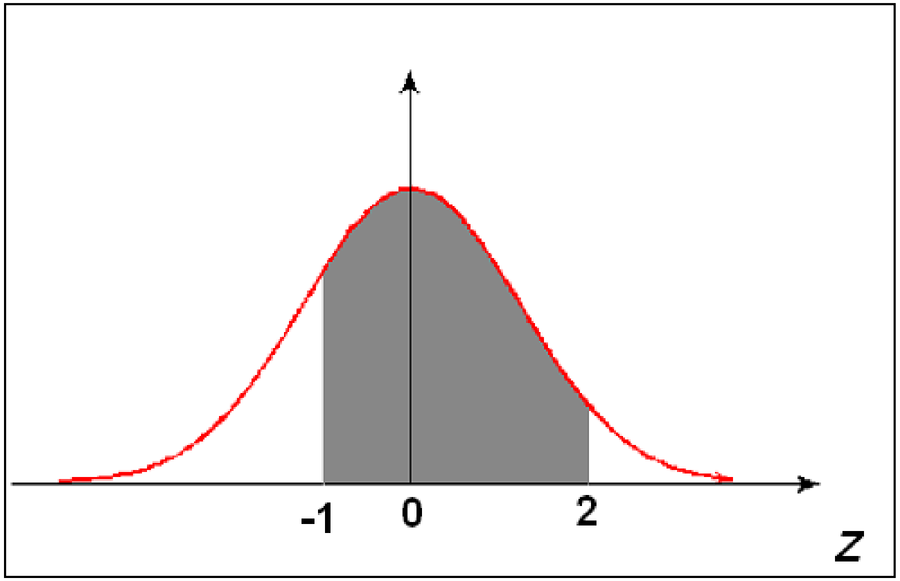
$= P(Z \leq 1{,}5)$ - $[1-P(Z \leq 1{,}5)]$

$= 2\times P(Z \leq 1{,}5) -1 = 2\times A(1{,}5) - 1$

$= 2\times 0{,}9332 - 1 = 0{,}8664.$



g) $P(-1 \leq Z \leq 2)$



$= P(Z \leq 2) - P(Z \leq -1)$

$= A(2) - P(Z \geq 1) = A(2) - (1 - A(1))$

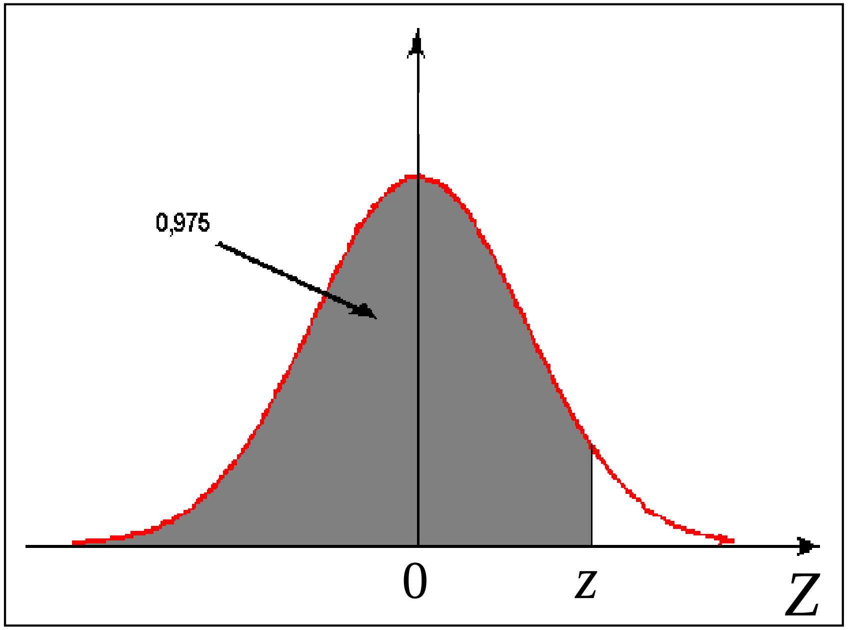
$= 0{,}9773 - (1 - 0{,}8413)$

$= 0{,}9773 - 0{,}1587 = 0{,}8186.$

Tabela

Como encontrar o valor z da distribuição $N(0;1)$ tal que:

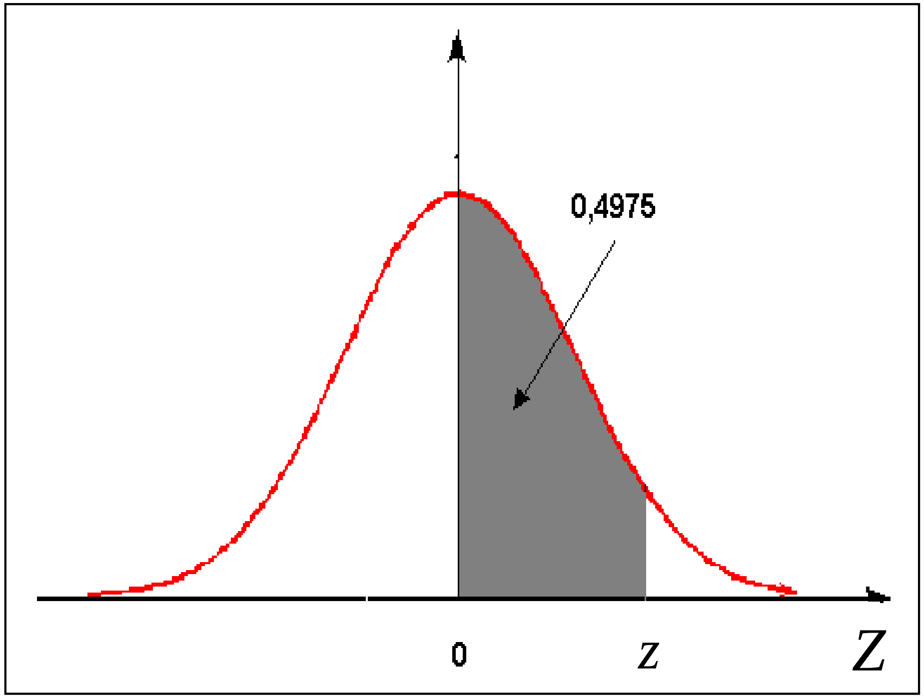
(i) $P(Z \leq z) = 0{,}975$



z é tal que $A(z) = 0{,}975$.

Pela tabela, $z = 1{,}96$.

(ii) $P(0 < Z \leq z) = 0{,}4975$

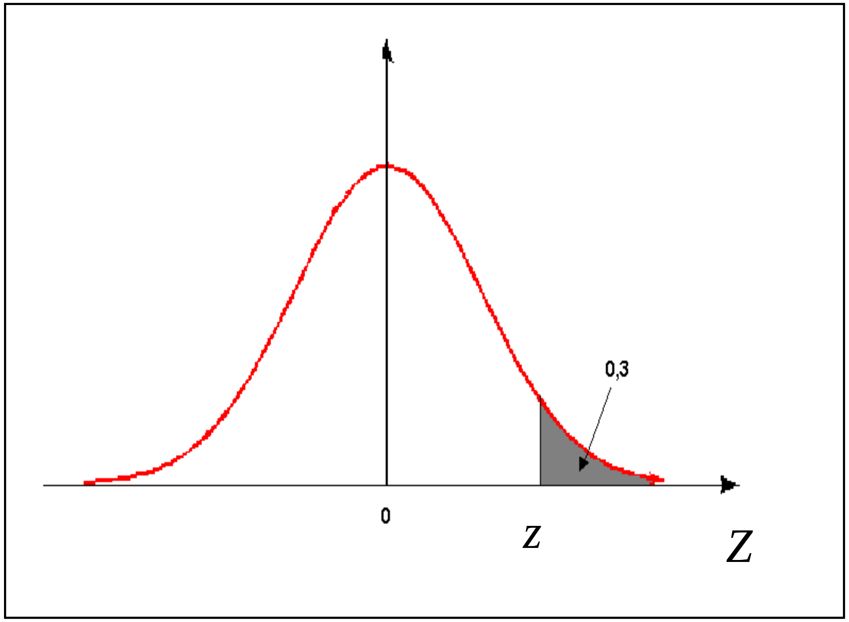


z é tal que $A(z) = 0{,}5 + 0{,}4975 = 0{,}9975$.

Pela tabela $z = 2{,}81$.

Tabela

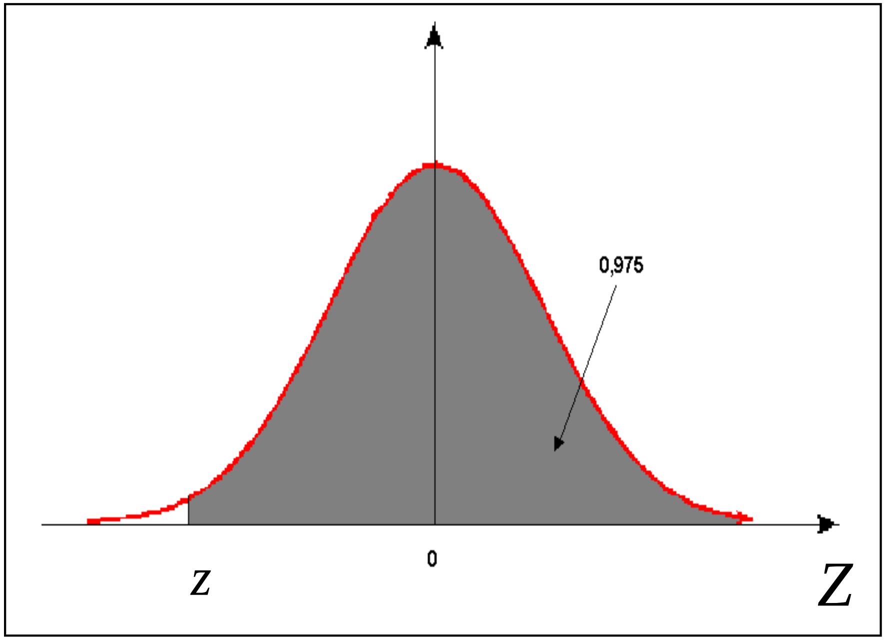
(iii) $P(Z \geq z) = 0{,}3$



z é tal que $A(z) = 0{,}7$.

Pela tabela, $z = 0{,}53$.

(iv) $P(Z \geq z) = 0{,}975$



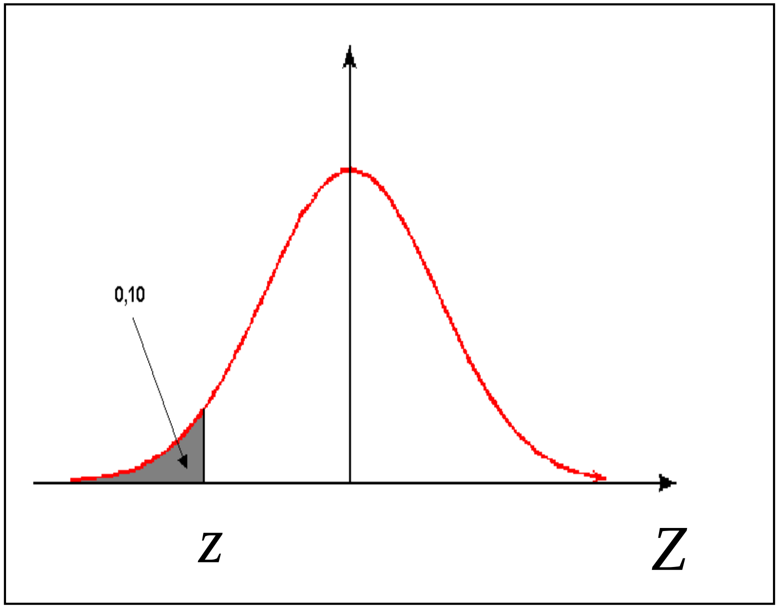
a é tal que $A(a) = 0{,}975$ e $z = -\,a$.

Pela tabela $a = 1{,}96$.

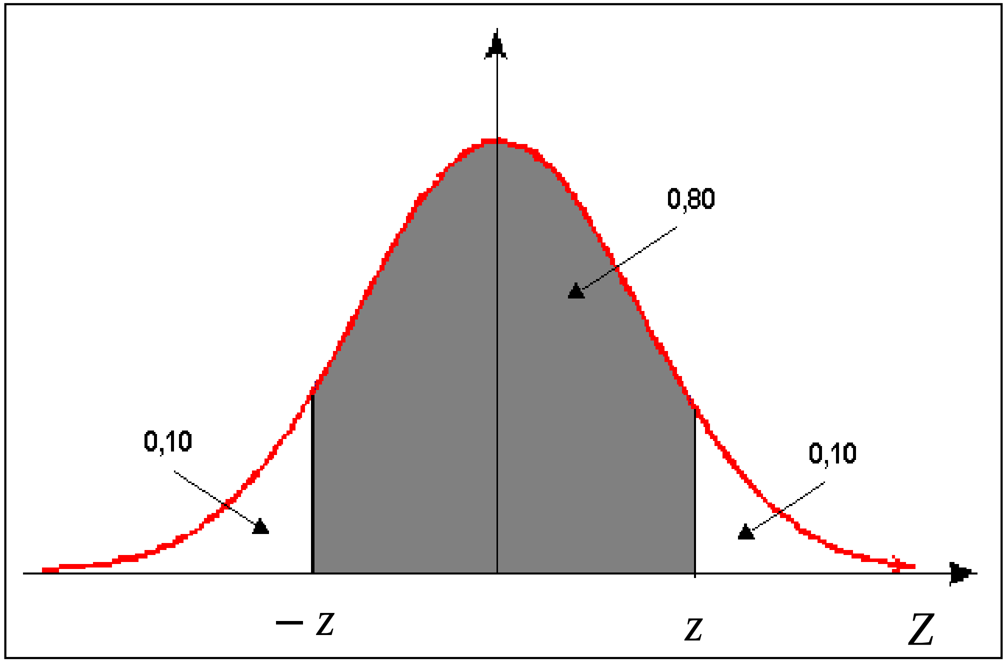
Então, $z = -\,1{,}96$.

Tabela

(v) $P(Z \leq z)$ = 0,10



(vi) $P(-z \leq Z \leq z)$ = 0,80



a é tal que $A(a)$=0,90 e $z = -a$.

Pela tabela, a = 1,28

e, assim, z = – 1,28.

z é tal que $P(Z < -z) = P(Z > z)$ = 0,1.

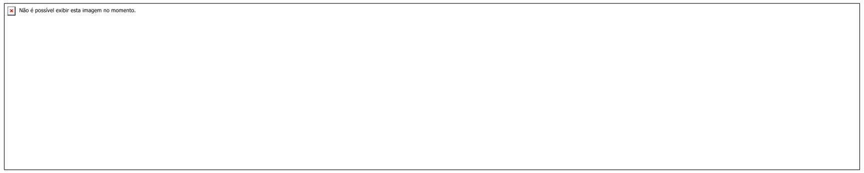
Isto é, $P(Z < z) = A(z)$ = 0,90

$\Rightarrow z$ = 1,28 (pela tabela).

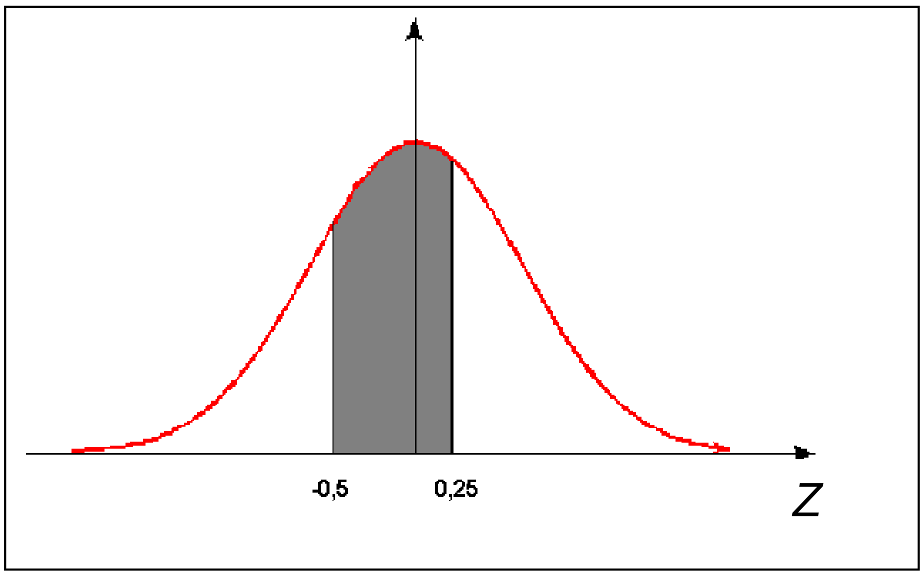
Tabela

Exemplo: Seja $X \sim N(10\ ;\ 64)$ ($\mu = 10$, $\sigma^2 = 64$ e $\sigma = 8$)

Calcular: (a) $P(6 \leq X \leq 12)$



$$= P(-0{,}5 < Z < 0{,}25)$$



$= A(0{,}25) - (1 - A(0{,}5)\ )$

$= 0{,}5987 - (1 - 0{,}6915)$

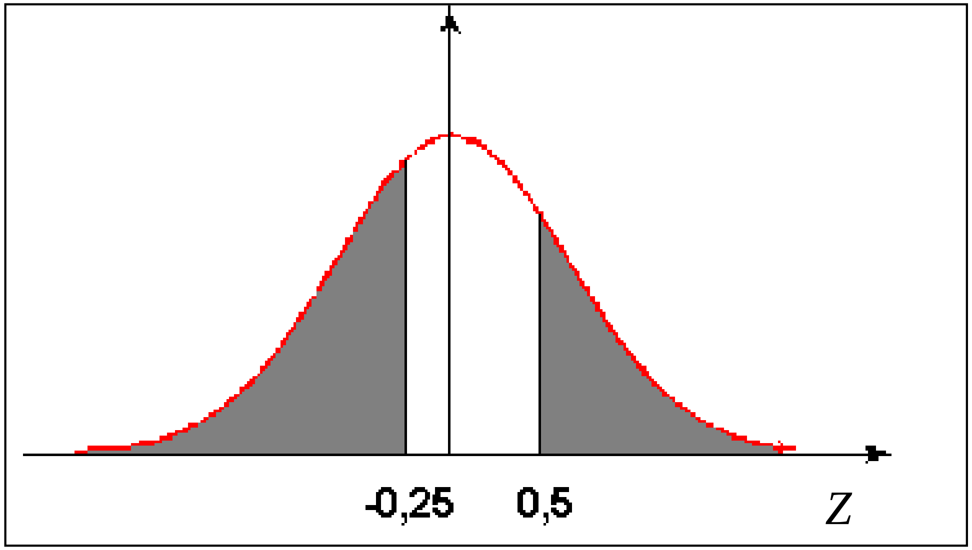
$= 0{,}5987 - 0{,}3085 = 0{,}2902$

Tabela

(b) $P(X \leq 8$ ou $X > 14)$

$$P(X \leq 8) + P(X > 14) = P\left(Z \leq \frac{8-10}{8}\right) + P\left(Z > \frac{14-10}{8}\right)$$

$$= P\left(Z < -0,25\right) + P\left(Z > 0,5\right)$$



$= 1 - A(0,25) + 1 - A(0,5)$

$= 1 - 0,5987 + 1 - 0,6915$

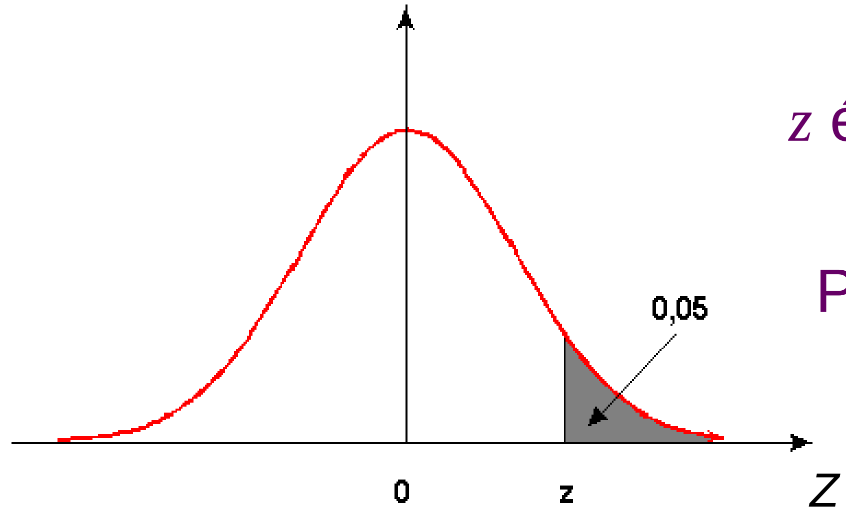
$= 0,7098$

Tabela

c) k tal que $P(X \geq k)$ = 0,05

z

$$P(X \geq k) = 0{,}05 \Rightarrow P\left(\frac{X - 10}{8} \geq \frac{k - 10}{8}\right) = P\left(Z \geq \frac{k-10}{8}\right) = 0{,}05.$$



z é tal que $A(z)$ = 0,95

Pela tabela z = 1,64

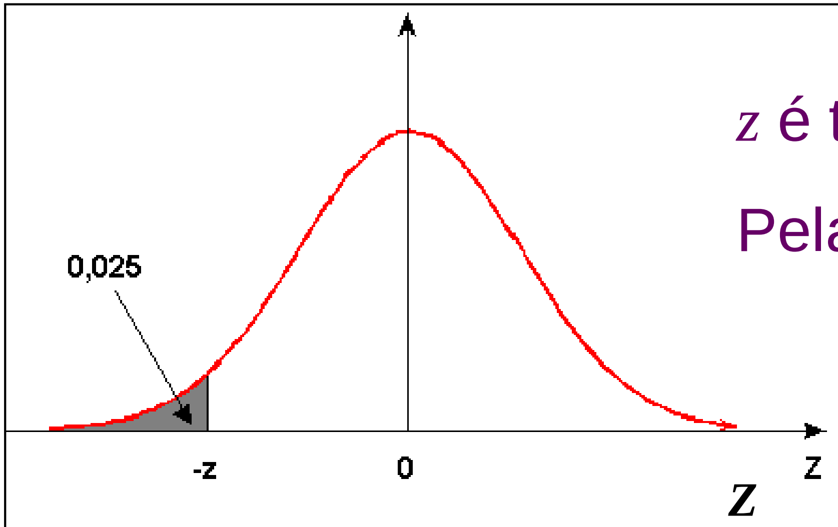
Então, $z = \dfrac{k - 10}{8} = 1{,}64.$

Logo $k = 10 + 1{,}64 \times 8 = 23{,}12.$

Tabela

d) k tal que $P(X \leq k) = 0{,}025$

$$P(X \leq k) = 0{,}025 \Rightarrow P\left(\frac{X - 10}{8} \leq \frac{k - 10}{8}\right) = P\left(Z \leq \frac{k - 10}{8}\right) = 0{,}025.$$



z é tal que $A(z) = 0{,}975$.

Pela tabela, $z = 1{,}96$.

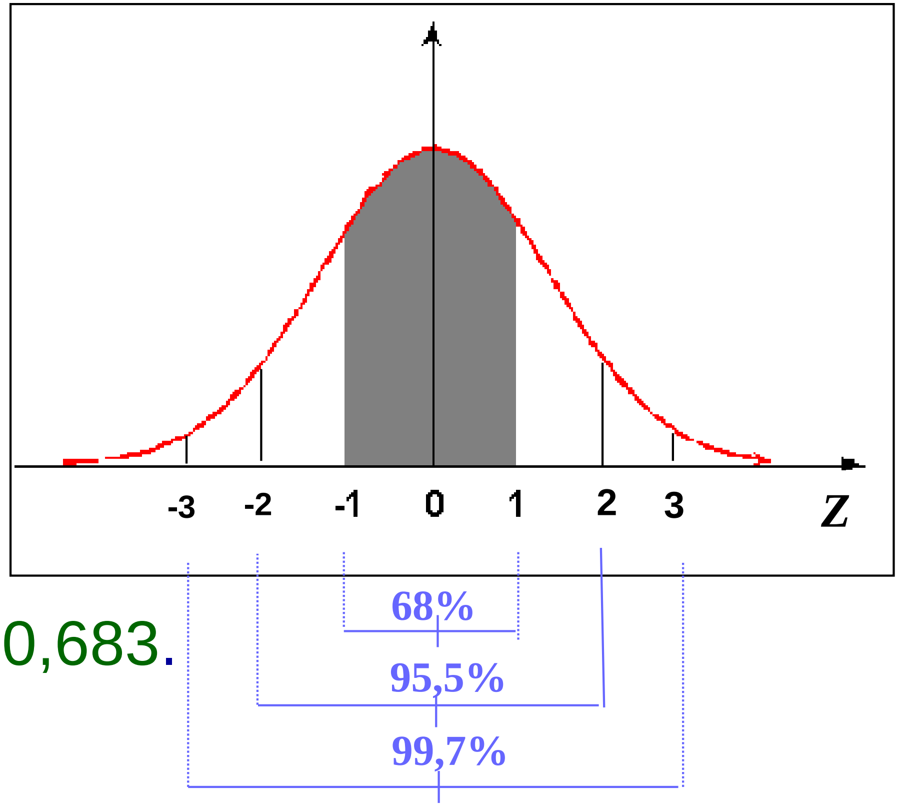
Então, $\dfrac{k - 10}{8} = -z = -1{,}96$.

Logo $k = 10 - 1{,}96 \times 8 = -5{,}68$.

Tabela

Observação : Se $X \sim N(\mu\ ;\ \sigma^2)$, então

$$\text{(i)}\ P(\mu - \sigma \le X \le \mu + \sigma) = P\left(\frac{\mu - \sigma - \mu}{\sigma} \le Z \le \frac{\mu + \sigma - \mu}{\sigma}\right)$$



$= P(-1 \le Z \le 1)$

$= 2\times(A(1) - 0{,}5)$

$= 2\times(0{,}8413 - 0{,}5)$

$= 0{,}6826$

ou seja, $P(\ \mu - \sigma \le X \le \mu + \sigma\ ) = 0{,}683$.

Analogamente,

(ii) $P(\ \mu - 2\sigma \le X \le \mu + 2\sigma\ ) = P(-2 \le Z \le 2\ ) = 0{,}955$.

(iii) $P(\ \mu - 3\sigma \le X \le \mu + 3\sigma\ ) = P(-3 \le Z \le 3\ ) = 0{,}997$.

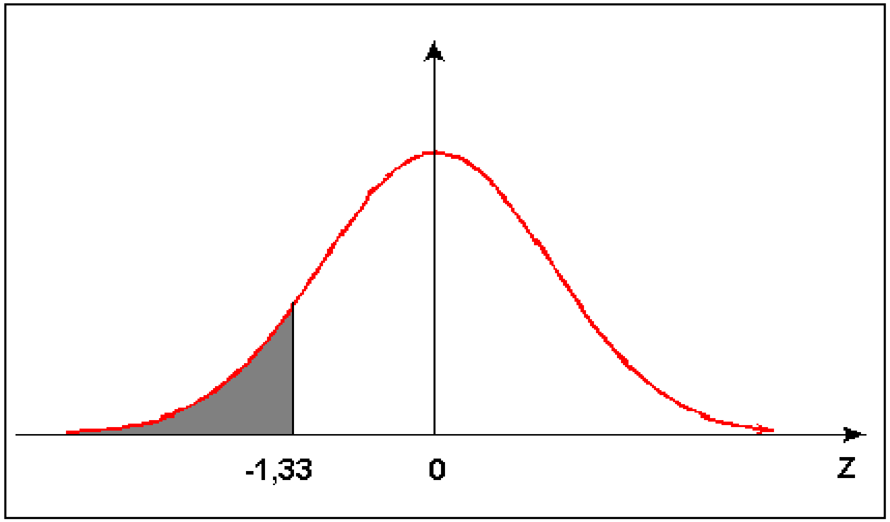
Tabela

Exemplo: O tempo gasto no exame vestibular de uma universidade tem distribuição Normal, com média 120 min e desvio padrão 15 min.

a) Sorteando-se um aluno ao acaso, qual é a probabilidade dele terminar o exame antes de 100 minutos?

X: tempo gasto no exame vestibular $\Rightarrow X \sim N(120; 15^2)$

$$P(X \leq 100) = P\left(Z \leq \frac{100 - 120}{15}\right) = P(Z \leq -1{,}33)$$



$= 1 - A(1{,}33)$

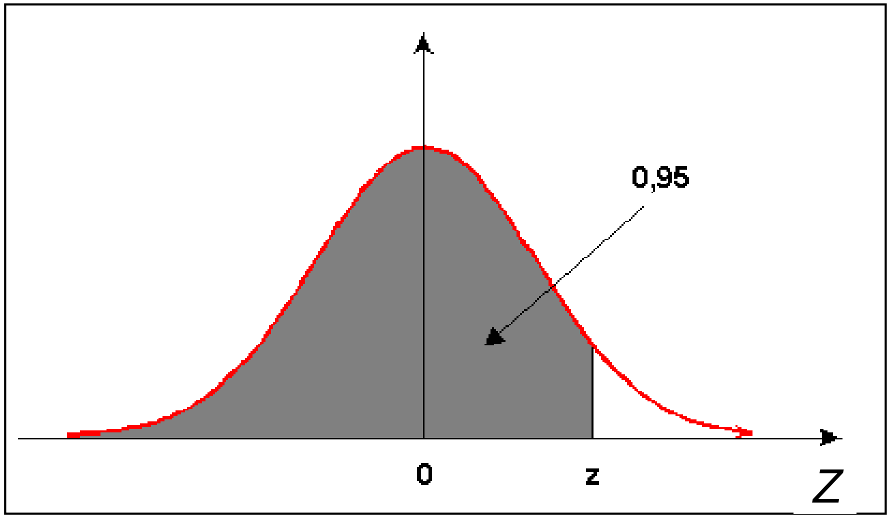
$= 1 - 0{,}9082 = 0{,}0918.$

Tabela

b) Qual deve ser o tempo de prova, de modo a permitir que 95% dos vestibulandos terminem no prazo estipulado?

X: tempo gasto no exame vestibular $\Rightarrow X \sim N(120;\, 15^2)$

$$P(X \le x) = 0{,}95 \Rightarrow P\left(Z \le \frac{x - 120}{15}\right) = 0{,}95$$



z = ? tal que $A(z)$ = 0,95.

Pela tabela z = 1,64.

Então, $z = 1{,}64 = \dfrac{x - 120}{15}$ $\Rightarrow x = 120 + 1{,}64 \times 15$

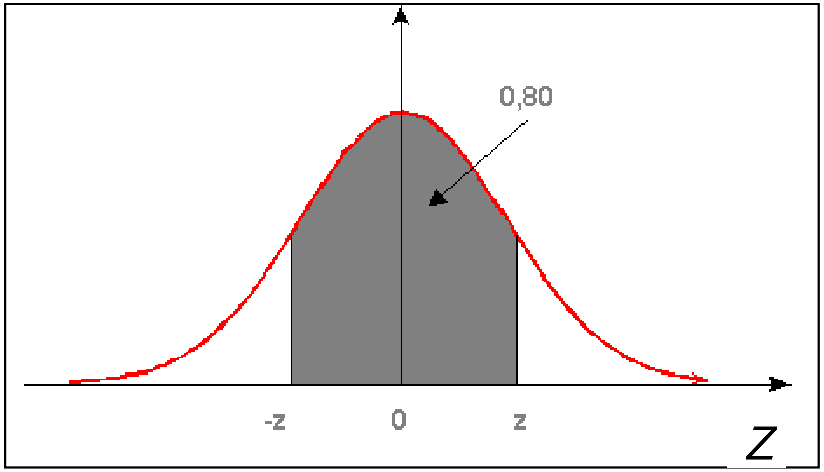
$\Rightarrow x = 144{,}6$ min.

Tabela

c) Qual é o intervalo de tempo, simétrico em torno da média (intervalo central), tal que 80% dos estudantes gastam para completar o exame?

X: tempo gasto no exame vestibular $\Rightarrow X \sim N(120, 15^2)$

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = 0{,}80 \Rightarrow P\left(\frac{x_1 - 120}{15} \leq Z \leq \frac{x_2 - 120}{15}\right) = 0{,}80$$



z = ? tal que $A(z)$ = 0,90.

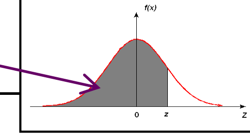
Pela tabela, z = 1,28.

$$-z = \frac{x_1 - 120}{15} = -1{,}28 \Rightarrow x_1 = 120 - 1{,}28 \times 15 \Rightarrow x_1 = 100{,}8\ min.$$

$$z = \frac{x_2 - 120}{15} = 1{,}28 \Rightarrow x_2 = 120 + 1{,}28 \times 15 \Rightarrow x_2 = 139{,}2\ min.$$

Tabela

Distribuição Normal : Valores de P(Z ≤ z) = A(z)



Segunda decimal de z

Parte inteira e primeira decimal de z

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Volta