

Teorema do limite central e estimação da proporção populacional p

Relembrando resultados importantes

RESULTADO 1:

Seja uma amostra aleatória de tamanho n de uma variável aleatória X , com média μ e variância σ^2 . Temos que:

$$E(\bar{X}) = \mu \quad \text{e} \quad \text{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

RESULTADO 2:

Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, para uma amostra aleatória de qualquer tamanho n de X ,

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

então,

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \sim N(0, 1)$$

RESULTADO 3:

Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ então, para uma amostra aleatória de tamanho n de X ,

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}} \sim t_{n-1},$$

em que, $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}$ é a variância amostral e t_{n-1} representa a distribuição *t-student* com $n-1$ graus de liberdade.

Teorema do Limite Central (*TLC*)

RESULTADO 4

Seja X uma *v. a.* que tem média μ e variância σ^2 .

Para amostras $X_1, X_2, \dots, X_n$, retiradas ao acaso e com reposição de X , a distribuição de probabilidade da média amostral $\bar{X}$ *aproxima-se, para n grande*, de uma distribuição normal, com média μ e variância σ^2/n , ou seja,

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right), \text{ para } n \text{ grande, aproximadamente.}$$

Sugestão: Assistir ao vídeo no link

<https://www.youtube.com/watch?v=jvoxEYmQHNM> 4

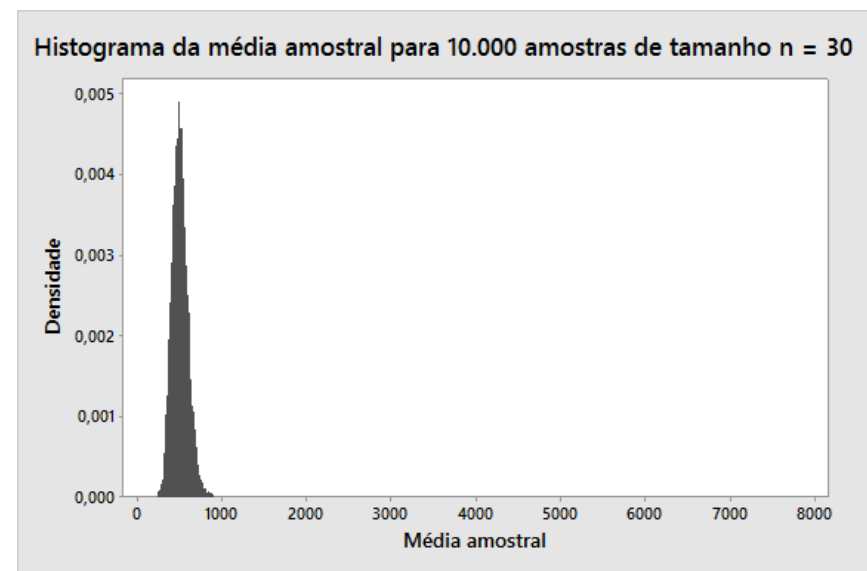
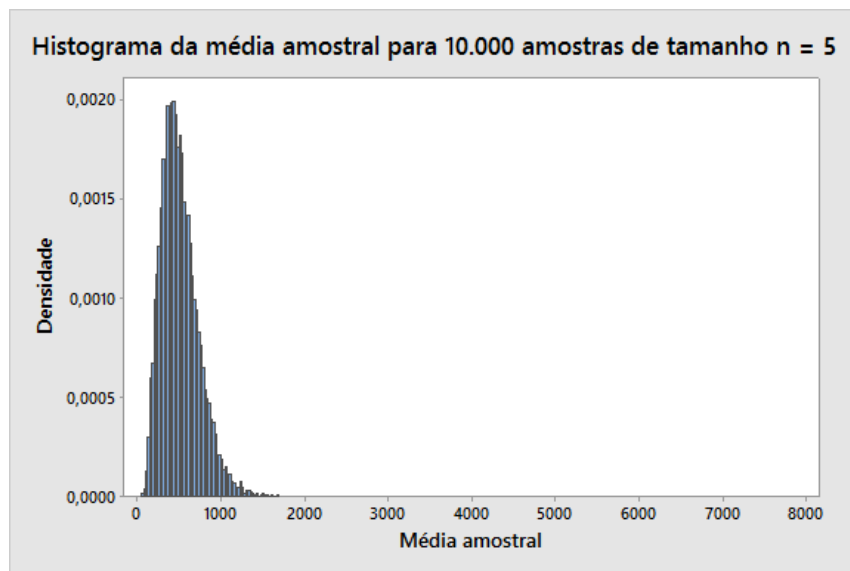
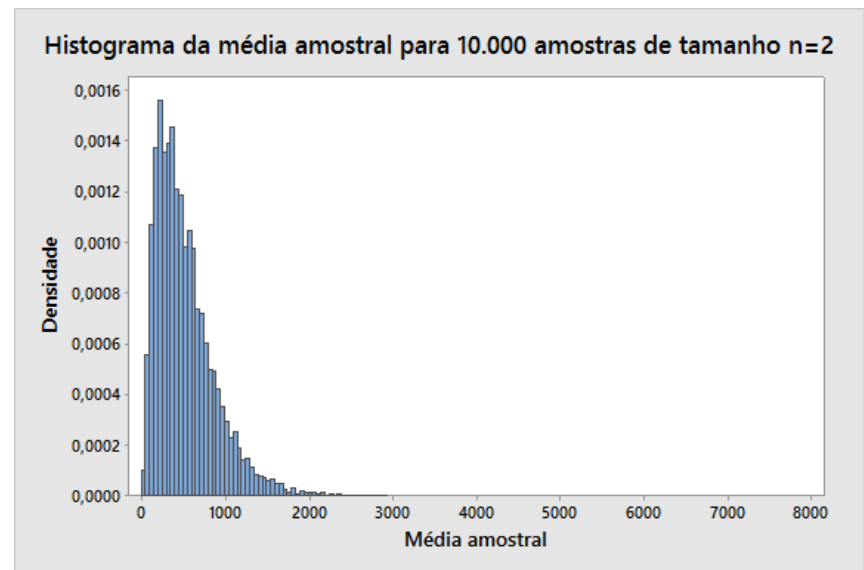
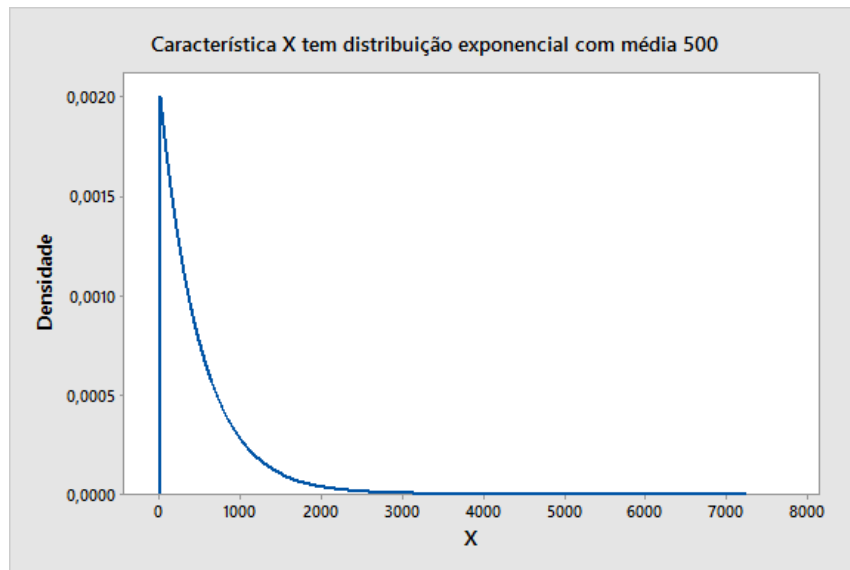
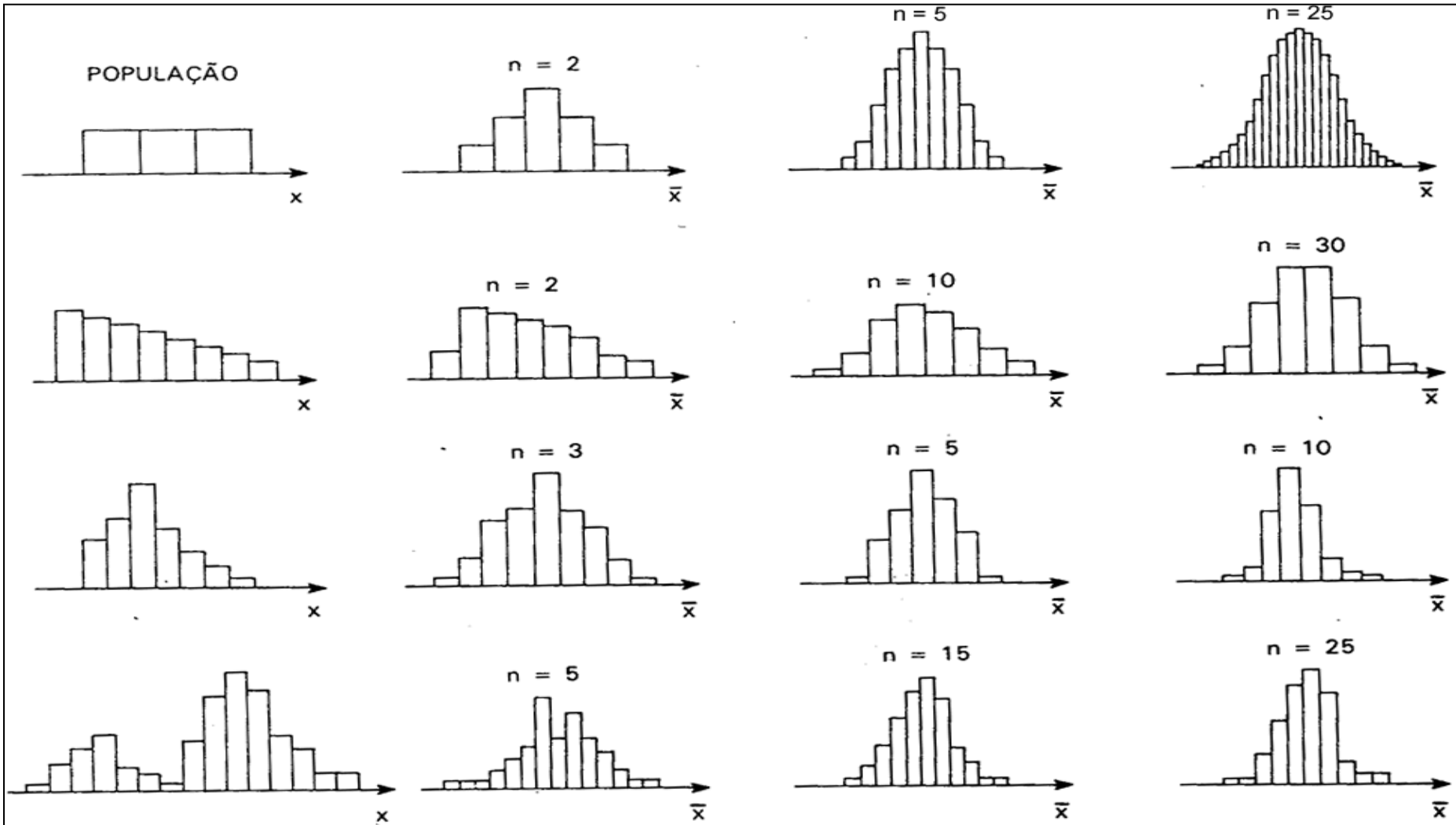


Figura 2: Histogramas correspondentes às *distribuições de $\bar{X}$* para amostras de algumas populações.



Fonte: BUSSAB & MORETTIN. *Estatística Básica*. São Paulo, Atual, 4ª edição, 2002, pp. 273.

Esses gráficos mostram que,

- quando n aumenta, independentemente da forma da distribuição de X , a distribuição de probabilidade da média amostral $\bar{X}$ aproxima-se de uma distribuição normal.
- conforme n aumenta, os valores de $\bar{X}$ tendem a se concentrar cada vez mais em torno de média μ , uma vez que a variância vai diminuindo;

No **R**

Pacote: ***RcmdrPlugin.TeachingDemos*** $\Rightarrow$

Simulação do Teorema do Limite Central

Portanto se a variável X na população não tem distribuição normal, e n é grande, usando o *TLC* o **intervalo de confiança aproximado para μ** , com coeficiente de confiança γ , é

para σ conhecido:
$$\left[\bar{X} - \underbrace{z}_{\downarrow} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \bar{X} + z \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right],$$

para σ desconhecido:
$$\left[\bar{X} - \underbrace{z}_{\downarrow} \frac{S}{\sqrt{n}} ; \bar{X} + z \frac{S}{\sqrt{n}} \right]$$

sendo z tal que $\gamma = P(-z \leq Z \leq z)$, com $Z \sim N(0, 1)$,

σ o desvio padrão da população e S o desvio padrão amostral.

Exemplo 1:

Não se conhece o consumo médio de combustível de automóveis da marca T . Sabe-se, no entanto, que o desvio padrão do consumo de combustível de automóveis dessa marca é 10 km/l . Na análise de 150 automóveis da marca T , obteve-se consumo médio de combustível de 8 km/l . Encontre um intervalo de confiança para o consumo médio de combustível dessa marca de carro. Adote um coeficiente de confiança igual a 95%.

X : consumo de combustível de automóveis da marca T
 $\sigma = 10 \text{ km/L}$

Amostra: $n = 150 \Rightarrow \bar{x}$ (média amostral) = 8 km/L

$\gamma = 0,95 \Rightarrow z = 1,96$

Pelo Teorema do Limite Central, o intervalo de confiança é dado, aproximadamente, por

$$\left[\bar{X} - z \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{X} + z \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

$$\left[8 - 1,96 \frac{10}{\sqrt{150}}; 8 + 1,96 \frac{10}{\sqrt{150}} \right]$$

$$[8 - 1,96 \times 0,82; 8 + 1,96 \times 0,82] = [6,40; 9,60]$$

Observe que o erro amostral ε é 1,60 *km/l*.

Exemplo 2:

A quantidade de colesterol X no sangue das alunas de uma universidade tem uma distribuição com desvio padrão $\sigma = 50 \text{ mg/dL}$ e média μ desconhecida. Se desejamos estimar a quantidade média μ de colesterol com erro $\varepsilon = 10 \text{ mg/dL}$ e confiança de 95%, quantas alunas devem formar a amostra para realizar o exame de sangue?

X : quantidade de colesterol no sangue das alunas da universidade

$$\sigma = 50 \text{ mg/dL}$$

$$\varepsilon = 10 \text{ mg/dL}$$

$$\gamma = 0,95 \Rightarrow z = 1,96$$

$$n = ??$$

Supondo que o tamanho da amostra a ser selecionada é suficientemente grande, pelo Teorema do Limite Central (*TLC*) temos:

$$\begin{aligned} n &= \left(\frac{Z}{\varepsilon} \right)^2 \sigma^2, \\ &= \left(\frac{1,96}{10} \right)^2 \times (50)^2 \\ &= 96,04 \end{aligned}$$

Assim, aproximadamente 97 alunas devem ser selecionadas para realizar o exame de sangue.

Exemplo 3:

Para estimar a renda semanal média de garçons de restaurantes em uma grande cidade, é colhida uma amostra da renda semanal de 75 garçons. A média e o desvio padrão amostrais encontrados são R\$ 527 e R\$ 50, respectivamente. Determine um intervalo de confiança, com coeficiente de confiança de 90%, para a renda média semanal de garçons dessa cidade.

X : renda semanal de garçons da cidade

Amostra: $n = 75 \Rightarrow \bar{x} = 527$ e $s = 50$

$\gamma = 0,9 \Rightarrow z = 1,65$

O intervalo de 90% de confiança é dado, aproximadamente, por

$$\left[\bar{x} - z \frac{s}{\sqrt{n}} ; \bar{x} + z \frac{s}{\sqrt{n}} \right] =$$
$$\left[527 - 1,65 \frac{50}{\sqrt{75}} ; 527 + 1,65 \frac{50}{\sqrt{75}} \right] =$$
$$\left[527 - 9,53 ; 527 + 9,53 \right] =$$
$$\left[517,47 ; 536,53 \right]$$

Estimação da proporção

Objetivo

Estimar uma proporção p (desconhecida) de elementos em uma população, apresentando certa característica de interesse, a partir da informação fornecida por uma amostra.

Exemplos:

p : proporção de alunos da *USP* que foram ao teatro pelo menos uma vez no último mês;

p : proporção de consumidores satisfeitos com os serviços prestados por uma empresa telefônica;

p : proporção de eleitores da cidade de São Paulo que votariam em um determinado candidato, caso a eleição para presidente se realizasse hoje;

p : proporção de crianças de 2 a 6 anos, do estado de São Paulo, que não estão matriculadas em escola de educação infantil.

- Vamos observar n elementos, extraídos ao acaso da população, de forma independente;
- Para cada elemento selecionado da população, verificamos a presença (“sucesso”) ou não (“fracasso”) da característica de interesse.

Neste caso, temos uma amostra aleatória (*a.a.*) de tamanho n de X , sendo X uma *v.a.* com distribuição de *Bernoulli*, que representamos por

$$X_1, X_2, \dots, X_n,$$

onde X_i vale “1”, se ocorre sucesso, ou “0”, se ocorre fracasso para o i -ésimo elemento da amostra.

Estimador pontual

O *estimador pontual para p* , também denominado *proporção amostral*, é definido como

$$\hat{p} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}.$$

Note que:

- $X_1 + \dots + X_n$ é o número de elementos na amostra que apresentam a característica;
- $\hat{p} = \bar{X}$

Se observamos k elementos na amostra com a característica, obtemos $\hat{p} = k / n$, que denominamos *estimativa pontual para p* .

Exemplo 1:

Seja p a proporção de alunos da *USP* que foram ao teatro pelo menos uma vez no último mês.

Suponha que foram entrevistados $n = 500$ estudantes, e que, desses, $k = 100$ teriam afirmado que foram ao teatro pelo menos uma vez no último mês.

A **estimativa pontual (proporção amostral) para p** é dada por:

$$\hat{p} = \frac{k}{n} = \frac{100}{500} = 0,20 ,$$

ou seja, 20% dos estudantes *entrevistados* afirmaram que foram ao teatro pelo menos uma vez no último mês.

→ Note que outra amostra de mesmo tamanho pode levar a uma outra estimativa pontual para p .

Intervalo de confiança para p

Vimos que, para qualquer variável aleatória X , quando n é grande, usando o Resultado 4 (*TLC*), um **intervalo de confiança** para μ tem a forma

$$\left[\bar{X} - \varepsilon; \bar{X} + \varepsilon \right],$$

onde $\varepsilon = z \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, sendo σ^2 a variância de X .

Neste caso, como $X \sim \text{Bernoulli}(p)$, com $\sigma^2 = p(1-p)$ e $\hat{p} = \bar{X}$, a estimativa intervalar para p é dada por

$$\left[\hat{p} - \varepsilon; \hat{p} + \varepsilon \right],$$

com $\varepsilon = z \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ e z tal que $\gamma = P(-z \leq Z \leq z)$ na $N(0,1)$.

Intervalo de confiança para p

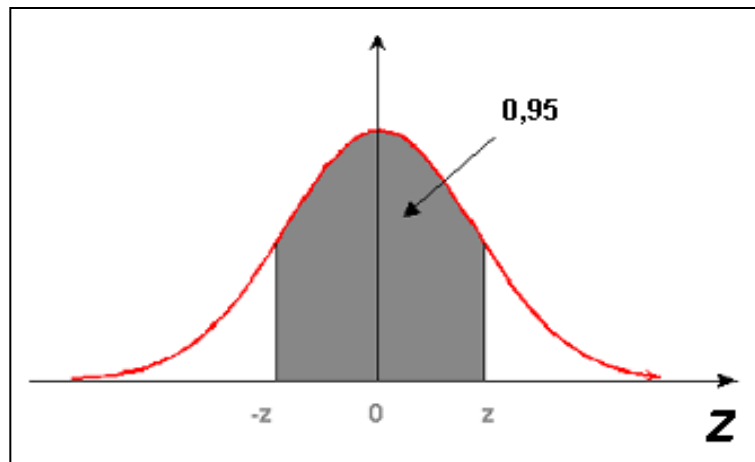
Na prática, substituímos a proporção desconhecida p pela proporção amostral $\hat{p}$, obtendo o seguinte **intervalo de confiança aproximado com coeficiente de confiança γ** :

$$IC(p; \gamma) = \left[\hat{p} - z \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}}; \hat{p} + z \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}} \right]$$

Exemplo 1 (continuação):

No exemplo da *USP*, temos $n = 500$ e $\hat{p} = 0,20$.

Construir um intervalo de confiança para p com coeficiente de confiança $\gamma = 0,95$.



Como $\gamma = 0,95$ fornece $z = 1,96$, o intervalo é dado por:

$$\left[\hat{p} - z \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}} ; \hat{p} + z \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}} \right]$$

$$\begin{aligned} &= \left[0,20 - 1,96 \sqrt{\frac{0,20 \times 0,80}{500}} ; 0,20 + 1,96 \sqrt{\frac{0,20 \times 0,80}{500}} \right] \\ &= [0,20 - 0,035 ; 0,20 + 0,035] = [0,165 ; 0,235]. \end{aligned}$$

Interpretação do IC com $\gamma = 95\%$:

Se sortearmos 100 amostras de tamanho $n = 500$ e construirmos os respectivos 100 intervalos de confiança, com coeficiente de confiança de 95%, esperamos que, aproximadamente, 95 destes intervalos contenham o verdadeiro valor de p .

Comentários:

Da expressão $\varepsilon = z \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$, é possível concluir que:

- para γ fixado, o erro diminui com o aumento de n .
- para n fixado, o erro aumenta com o aumento de γ .

Dimensionamento da amostra

Da relação $\varepsilon = z \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$,

segue que o **tamanho amostral** n , dados γ e a margem de erro ε , tem a

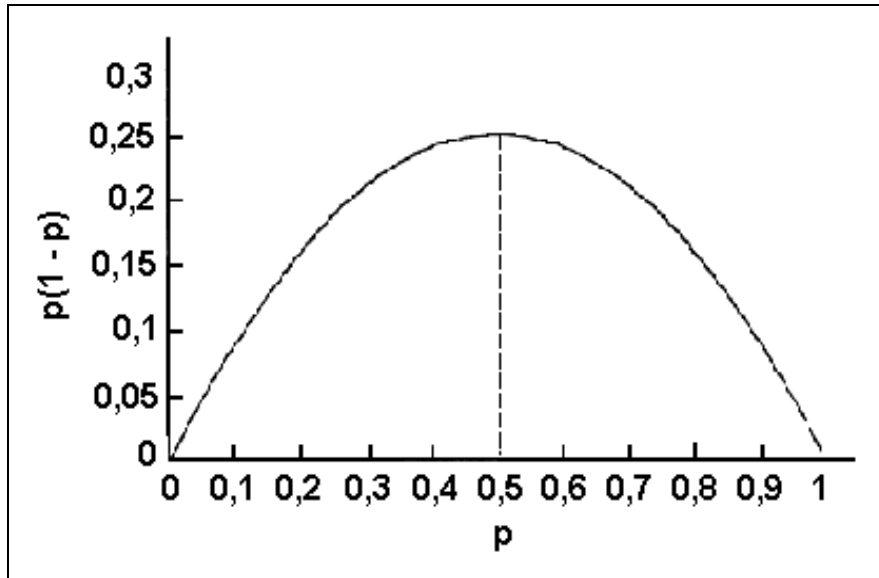
$$n = \left(\frac{z}{\varepsilon} \right)^2 p(1-p),$$

onde z é tal que $\gamma = P(-z \leq Z \leq z)$ e $Z \sim N(0,1)$.

Entretanto, nesta expressão, n depende de $p(1-p)$, que é desconhecido.

→ **Como calcular o valor de n ?**

Gráfico da função $p(1-p)$, para $0 \leq p \leq 1$.



Pela figura observamos que:

- a função $p(1-p)$ é uma parábola simétrica em torno de $p = 0,5$;
- o máximo de $p(1-p)$ é 0,25, alcançado quando $p = 0,5$.

Assim, na prática, substituímos $p(1-p)$ por seu valor máximo, obtendo

$$n = \left(\frac{z}{\varepsilon} \right)^2 0,25 ,$$

que pode fornecer um valor de n maior do que o necessário.

Exemplo 1 (continuação):

No exemplo da *USP* suponha que nenhuma amostra foi coletada. Quantos estudantes precisamos consultar de modo que a estimativa pontual esteja, no máximo, a 0,02 da proporção verdadeira p , com uma probabilidade de 0,95?

Dados do problema:

$\varepsilon = 0,02$ (erro da estimativa);

$\gamma = 0,95 \Rightarrow z = 1,96$.

$$n = \left(\frac{1,96}{0,02} \right)^2 p(1-p) \leq \left(\frac{1,96}{0,02} \right)^2 0,25 = 2401 \text{ estudantes.}$$

Pergunta: *É possível reduzir o tamanho da amostra quando temos alguma informação a respeito de p ?*

Por exemplo, sabemos que:

- p não é superior a 0,30, ou
- p é pelo menos 0,80, ou
- p está entre 0,30 e 0,60.

Resposta: *Depende do tipo de informação sobre p .*

Em alguns casos, podemos substituir a informação $p(1-p)$, que aparece na expressão de n , por um valor menor que 0,25.

Redução do tamanho da amostra

Vimos que, se nada sabemos sobre o valor de p , no cálculo de n , substituímos $p(1-p)$ por seu valor máximo, e calculamos

$$n = \left(\frac{z}{\varepsilon} \right)^2 \times 0,25.$$

Se temos a informação de que p **é no máximo 0,30** ($p \leq 0,30$) então o valor máximo de $p(1-p)$ será dado por $0,3 \times 0,7 = 0,21$.

Logo, reduzimos o valor de n para

$$n = \left(\frac{z}{\varepsilon} \right)^2 \times 0,21.$$

Agora, se p é pelo menos **0,80** ($p \geq 0,80$), então o máximo valor de $p(1-p)$ é $0,8 \times 0,2 = 0,16$, e temos

$$n = \left(\frac{z}{\varepsilon} \right)^2 \times 0,16.$$

Mas, se **$0,30 \leq p \leq 0,60$** o máximo valor de $p(1-p)$ é $0,5 \times 0,5 = 0,25$ e, neste caso, não há redução, ou seja,

$$n = \left(\frac{z}{\varepsilon} \right)^2 \times 0,25.$$

Exemplo 1 (continuação):

No exemplo da *USP*, suponha que temos a informação de que no máximo 30% dos alunos da *USP* foram ao teatro no último mês.

Portanto, temos que $p \leq 0,30$ e, como vimos, o máximo valor de $p(1-p)$ neste caso é 0,21.

Assim, precisamos amostrar

$$n = \left(\frac{z}{\varepsilon} \right)^2 0,21 = \left(\frac{1,96}{0,02} \right)^2 0,21 = 2401 \text{ estudantes,}$$

conseguindo uma redução de $2401 - 2017 = 384$ estudantes.

Exemplo 2:

Por ocasião do centenário da imigração japonesa no Brasil, um Instituto de Pesquisa conduziu uma pesquisa, com a finalidade de conhecer alguns aspectos dessa população vivendo no país. Entre outras questões, desejou-se estimar a proporção p de japoneses e descendentes no Brasil que pertenciam a alguma associação de cultura japonesa.

Foram selecionados 610 japoneses e descendentes, com mais de 16 anos de idade.

Na amostra aleatória selecionada, 195 declararam frequentar ou pertencer a alguma associação de cultura japonesa.

- Estimativa por ponto para p : $\hat{p} = \frac{195}{610} \cong 0,32$

- Intervalo de confiança aproximado de 95% para p :

$$\begin{aligned} & \left(0,32 - 1,96 \sqrt{\frac{0,32(1-0,32)}{610}} ; 0,32 + 1,96 \sqrt{\frac{0,32(1-0,32)}{610}} \right) \\ & = (0,32 - 0,037 ; 0,32 + 0,037) = (0,283 ; 0,357) \end{aligned}$$

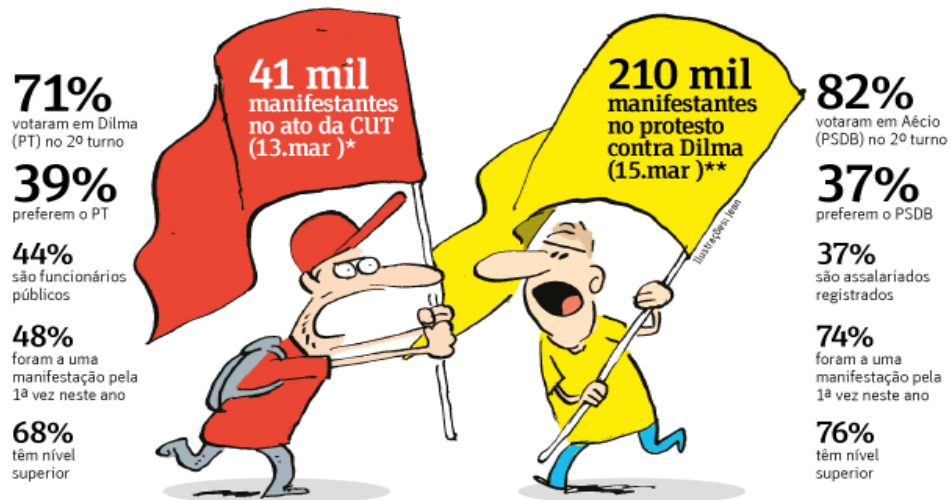
Uma Ilustração

*Pesquisa Datafolha em 13/3 com 303 entrevistas e margem de erro de 6 pontos

**Pesquisa Datafolha em 15/3 com 432 entrevistas e margem de erro de 5 pontos

PERFIS OPOSTOS

Datafolha mostra as diferenças entre os manifestantes que foram às ruas em São Paulo nos últimos dias

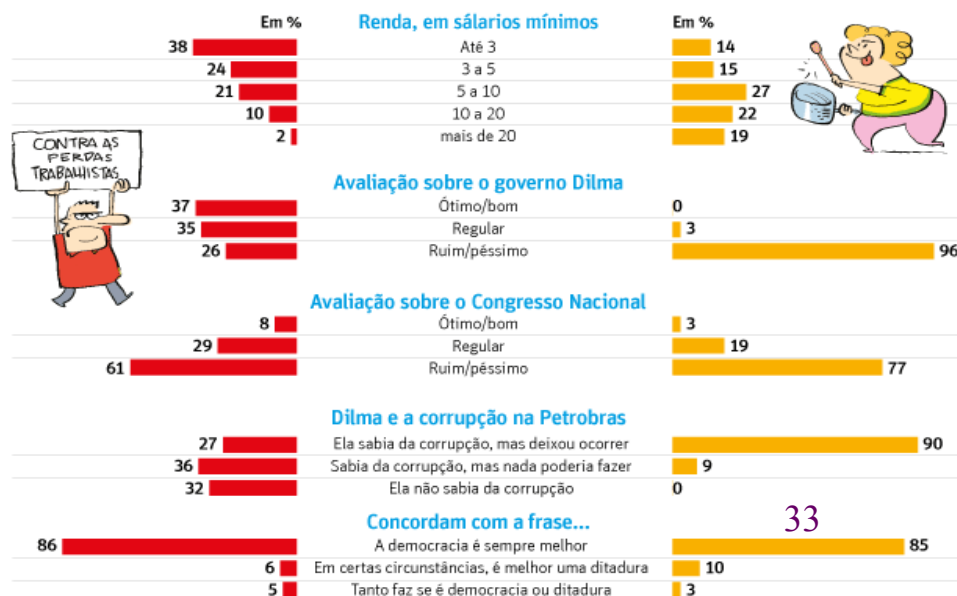


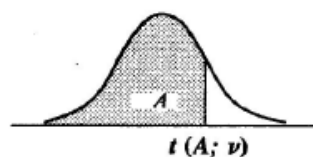
Motivos para participar da manifestação

Resposta múltipla e espontânea



Fonte da Pesquisa na íntegra:
<http://www1.folha.uol.com.br/poder/2015/03/1603885-maioria-foi-as-ruas-contracorrupcao-diz-datafolha.shtml>

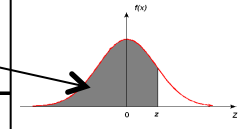




ν	A						
	.60	.70	.80	.85	.90	.95	.975
1	0.325	0.727	1.376	1.963	3.078	6.314	12.706
2	0.289	0.617	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303
3	0.277	0.584	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182
4	0.271	0.569	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776
5	0.267	0.559	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571
6	0.265	0.553	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447
7	0.263	0.549	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365
8	0.262	0.546	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306
9	0.261	0.543	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262
10	0.260	0.542	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228
11	0.260	0.540	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201
12	0.259	0.539	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179
13	0.259	0.537	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160
14	0.258	0.537	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145
15	0.258	0.536	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131
16	0.258	0.535	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120
17	0.257	0.534	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110
18	0.257	0.534	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101
19	0.257	0.533	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093
20	0.257	0.533	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086
21	0.257	0.532	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080
22	0.256	0.532	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074
23	0.256	0.532	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069
24	0.256	0.531	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064
25	0.256	0.531	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060
26	0.256	0.531	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056
27	0.256	0.531	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052
28	0.256	0.530	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048
29	0.256	0.530	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045
30	0.256	0.530	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042
40	0.255	0.529	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021
60	0.254	0.527	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000
120	0.254	0.526	0.845	1.041	1.289	1.658	1.980
∞	0.253	0.524	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960

ν	A						
	.98	.985	.99	.9925	.995	.9975	.9995
1	15.895	21.205	31.821	42.434	63.657	127.322	636.590
2	4.849	5.643	6.965	8.073	9.925	14.089	31.598
3	3.482	3.896	4.541	5.047	5.841	7.453	12.924
4	2.999	3.298	3.747	4.088	4.604	5.598	8.610
5	2.757	3.003	3.365	3.634	4.032	4.773	6.869
6	2.612	2.829	3.143	3.372	3.707	4.317	5.959
7	2.517	2.715	2.998	3.203	3.499	4.029	5.408
8	2.449	2.634	2.896	3.085	3.355	3.833	5.041
9	2.398	2.574	2.821	2.998	3.250	3.690	4.781
10	2.359	2.527	2.764	2.932	3.169	3.581	4.587
11	2.328	2.491	2.718	2.879	3.106	3.497	4.437
12	2.303	2.461	2.681	2.836	3.055	3.428	4.318
13	2.282	2.436	2.650	2.801	3.012	3.372	4.221
14	2.264	2.415	2.624	2.771	2.977	3.326	4.140
15	2.249	2.397	2.602	2.746	2.947	3.286	4.073
16	2.235	2.382	2.583	2.724	2.921	3.252	4.015
17	2.224	2.368	2.567	2.706	2.898	3.222	3.965
18	2.214	2.356	2.552	2.689	2.878	3.197	3.922
19	2.205	2.346	2.539	2.674	2.861	3.174	3.883
20	2.197	2.336	2.528	2.661	2.845	3.153	3.849
21	2.189	2.328	2.518	2.649	2.831	3.135	3.819
22	2.183	2.320	2.508	2.639	2.819	3.119	3.792
23	2.177	2.313	2.500	2.629	2.807	3.104	3.768
24	2.172	2.307	2.492	2.620	2.797	3.091	3.745
25	2.167	2.301	2.485	2.612	2.787	3.078	3.725
26	2.162	2.296	2.479	2.605	2.779	3.067	3.707
27	2.158	2.291	2.473	2.598	2.771	3.057	3.690
28	2.154	2.286	2.467	2.592	2.763	3.047	3.674
29	2.150	2.282	2.462	2.586	2.756	3.038	3.659
30	2.147	2.278	2.457	2.581	2.750	3.030	3.646
40	2.123	2.250	2.423	2.542	2.704	2.971	3.551
60	2.099	2.223	2.390	2.504	2.660	2.915	3.460
120	2.076	2.196	2.358	2.468	2.617	2.860	3.373
∞	2.054	2.170	2.326	2.432	2.576	2.807	3.291

Distribuição Normal : Valores de $P(Z \leq z) = A(z)$



Segunda decimal de z

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000