Exemplo 12.1. Uma indústria usa, como um dos componentes das máquinas que produz, um parafuso importado, que deve satisfazer a algumas exigências. Uma dessas é a resistência à tração. Esses parafusos são fabricados por alguns países, e as especificações técnicas variam de país para país. Por exemplo, o catálogo do país A afirma que a resistência média à tração de seus parafusos é de 145 kg, com desvio padrão de 12 kg. Já para o país B, a média é de 155 kg e desvio padrão 20 kg.

Um lote desses parafusos, de origem desconhecida, será leiloado a um preço muito convidativo. Para que a indústria saiba se faz ou não uma oferta, ela necessita saber qual

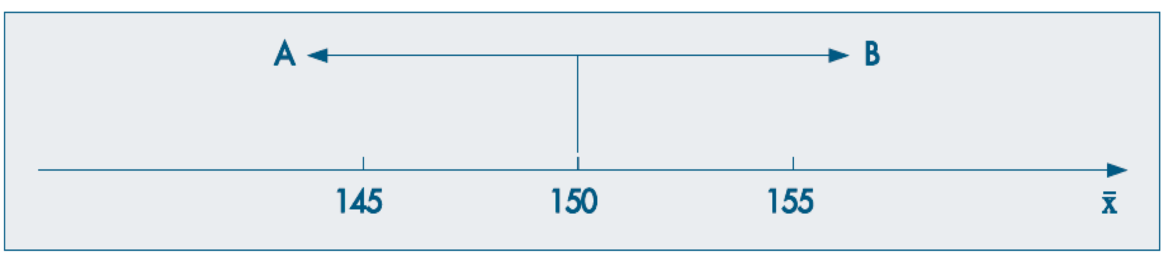
país produziu tais parafusos. O edital do leiloeiro afirma que, pouco antes do leilão, será divulgada a resistência média $\bar{x}$ de uma amostra de 25 parafusos do lote. Qual regra de decisão deve ser usada pela indústria para dizer se os parafusos são do país A ou B?

Uma resposta que ocorre imediatamente é a que considera como país produtor aquele para o qual a média da amostra mais se aproximar da média da população. Assim, uma possível regra de decisão seria:

Se $\bar{x} \leqslant 150$ (o ponto médio entre 145 e 155), diremos que os parafusos são do país A; caso contrário, isto é, $\bar{x} > 150$, são do país B.

Na Figura 12.1 ilustramos essa regra de decisão.

Figura 12.1: Regra de decisão para o Exemplo 12.1.



Suponha que, no dia do leilão, fôssemos informados de que $\bar{x} = 148$; de acordo com nossa regra de decisão, diríamos que os parafusos são de origem A. Podemos estar enganados nessa conclusão? Ou, em outras palavras, é possível que uma amostra de 25 parafusos de origem B apresente média $\bar{x} = 148$? Sim, é possível. Então, para melhor entendermos a regra de decisão adotada, é interessante estudarmos os tipos de erros que podemos cometer e as respectivas probabilidades.

Podemos cometer dois tipos de erros, e vamos numerá-los para facilitar a linguagem:

Erro de tipo I: dizer que os parafusos são de A quando na realidade são de B. Isso ocorre quando uma amostra de 25 parafusos de B apresenta média $\bar{x}$ inferior ou igual a 150 kg.

Erro de tipo II: dizer que os parafusos são de B, quando na realidade eles são de A. Isso ocorre quando uma amostra de 25 parafusos de A apresenta média $\bar{x}$ superior a 150 kg.

Para facilitar ainda mais, vamos definir duas hipóteses também numeradas:

H_0: os parafusos são de origem B. Isso equivale a dizer que a resistência X de cada parafuso segue uma distribuição com média $\mu = 155$ e desvio padrão $\sigma = 20$.

H_1: os parafusos são de A, isto é, a média $\mu = 145$ e o desvio padrão $\sigma = 12$.

Finalmente, vamos indicar por RC a região correspondente aos valores menores que 150, ou seja,

$$RC = \{y \in \mathbb{R} | y \leqslant 150\}.$$

Com as notações indicadas acima, a probabilidade de se cometer cada um dos erros pode ser escrita:

$$P(\text{erro I}) = P(\bar{X} \in RC | H_0 \text{ é verdadeira}) = \alpha$$

e

$$P(\text{erro II}) = P(\bar{X} \notin RC | H_1 \text{ é verdadeira}) = \beta.$$

Quando H_0 for verdadeira, isto é, os parafusos forem de B, sabemos do TLC que $\bar{X}$ terá distribuição aproximadamente normal, com média 155 e desvio padrão igual a $20/\sqrt{25} = 4$, isto é,

$$\bar{X} \sim N(155{,}16).$$

Denotando por Z a v.a. com distribuição $N(0,1)$, temos

$$\begin{aligned} P(\text{erro I}) &= P(\bar{X} \in RC \,|\, H_0 \text{ é verdadeira}) \\ &= P(\bar{X} \leqslant 150 | \bar{X} \sim N(155{,}16)) \\ &= P\left(Z \leqslant \frac{150 - 155}{4}\right) \\ &= P(Z \leqslant -1{,}25) = 0{,}10565 = 10{,}56\% = \alpha. \end{aligned}$$

De modo análogo, quando H_1 for a alternativa verdadeira, teremos que a v.a. $\bar{X}$ é tal que, aproximadamente,

$$\bar{X} \sim N(145;\, 5{,}76).$$

Teremos, então,

$$\begin{aligned} P(\text{erro II}) &= P(\bar{X} \notin RC | H_1 \text{ é verdadeira}) \\ &= P(\bar{X} > 150 | \bar{X} \sim N(145;\, 5{,}76)) \end{aligned}$$

$$= P\left(Z > \frac{150 - 145}{2{,}4}\right) = P(Z > 2{,}08) = 0{,}01876 = 1{,}88\% = \beta.$$

Observando esses dois resultados, notamos que, com a regra de decisão adotada, estaremos cometendo o erro de tipo I com maior probabilidade do que o erro de tipo II. De certo modo, essa regra de decisão privilegia a afirmação de que os parafusos são de A. No Quadro 12.1 ilustramos as conseqüências que podem advir da regra de decisão adotada.

Quadro 12.1: Resumo do teste H_0: $\mu = 155$, H_1: $\mu = 145$, com $RC =]-\infty, 150]$.

Origem Real dos Parafusos	Decisão	
	RC 150 $\bar{X}$	
	A	B
A	Sem erro	Erro tipo II β = 1,88%
B	Erro tipo I α = 10,56%	Sem erro

Para cada regra de decisão adotada, isto é, se escolhermos um valor $\bar{x}_c$ em vez de 150 no Quadro 12.1, apenas as probabilidades α e β mudarão. Se $\bar{x}_c$ for escolhido menor que 150, notamos que α diminuirá e β aumentará. Logo, deve existir um ponto em que α seja igual a β, ou seja, uma regra de decisão em que a probabilidade de errar contra A seja a mesma que errar contra B. Mostre que esse ponto é $\bar{x}_c = 148{,}75$, e nesse caso $\alpha = \beta = 5{,}94\%$.

Do exposto acima constatamos que, escolhido um valor de $\bar{x}_c$, podemos achar as probabilidades α e β de cometer cada tipo de erro. Mas também podemos proceder de modo inverso: fixar um dos erros, digamos α, e encontrar a regra de decisão que irá corresponder à probabilidade de erro de tipo I igual a α.

Por exemplo, fixemos α em 5%, e vejamos qual a regra de decisão correspondente. Temos

$$5\% = P(\text{erro I}) = P(\bar{X} \leqslant \bar{x}_c | \bar{X} \sim N(155{,}16))$$
$$= P(Z \leqslant -1{,}645),$$

mas da transformação para a normal padrão sabemos que

$$-1{,}645 = \frac{\bar{x}_c - 155}{4},$$

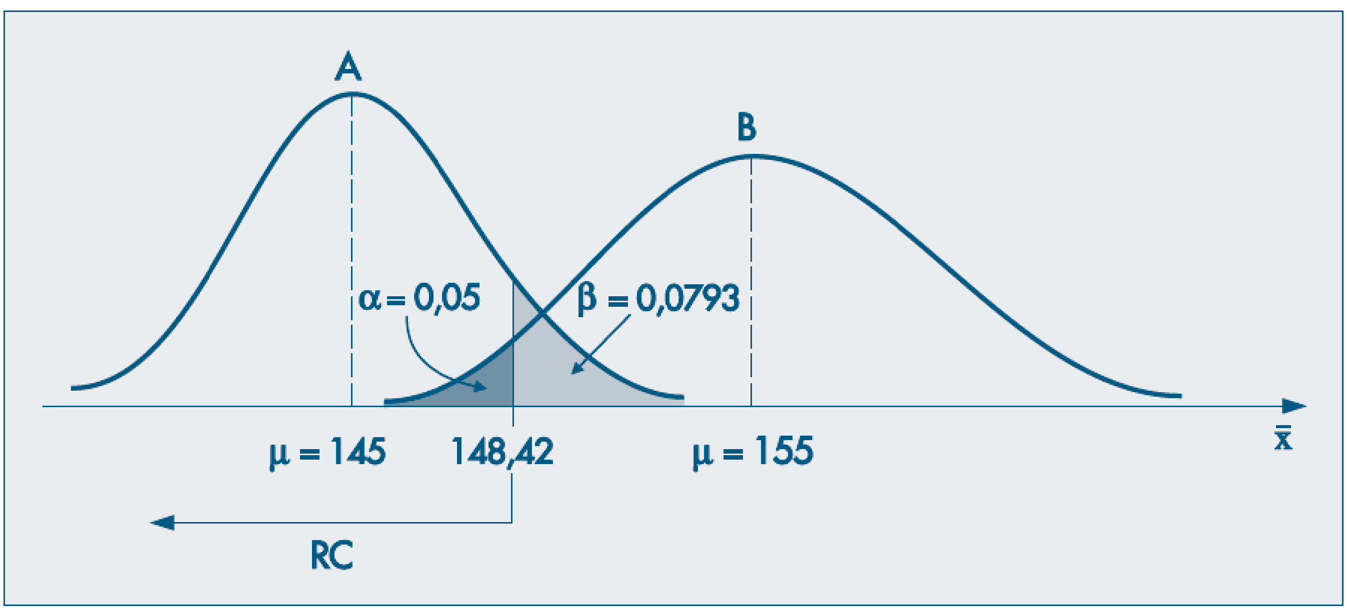
ou seja, $\bar{x}_c = 148{,}42$. Então, a regra de decisão será:

Se $\bar{x}$ for inferior a 148,42, dizemos que o lote é de A; caso contrário, dizemos que é de B.

Com essa regra, a probabilidade do erro de tipo II será

$$\beta = P(\text{erro II}) = P(\bar{X} > 148{,}42 | \bar{X} \sim (145;\ 5{,}76))$$
$$= P(Z > 1{,}425) = 7{,}93\%.$$

Figura 12.2: Ilustração dos erros de tipo I e II para o Exemplo 12.1.



A hipótese que nos interessa agora é:

H_0: os parafusos são de origem B (μ = 155 e σ = 20).

Caso essa não seja a hipótese verdadeira, a alternativa é muito mais ampla e pode ser expressa como:

H_1: os parafusos não são de origem B (μ e σ desconhecidos).

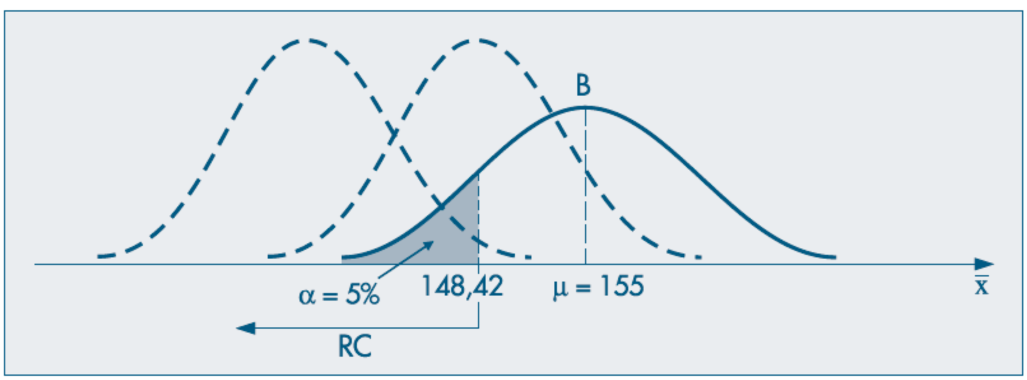
H_1: os parafusos não são de origem B ($\mu < 155$ e σ qualquer).

Isso significa que só iremos desconfiar de H_0 se $\bar{x}$ for muito menor do que 155. Ou seja, a nossa regra de decisão deverá ser semelhante à vista anteriormente. Como os parâmetros sob a hipótese alternativa são muitos, a melhor solução para construir a regra de decisão é fixar α, a probabilidade do erro de tipo I (rejeitar H_0 quando ela for verdadeira). Se fixarmos novamente α = 0,5, e nesse caso a regra de decisão depende apenas das informações de H_0, a regra de decisão será a mesma anterior:

Se $\bar{x}$ for superior a 148,42, diremos que o lote é de origem B; caso contrário, diremos que não é de origem B.

Com essa regra de decisão e com a hipótese alternativa mais ampla, não podemos encontrar β, pois não temos um único parâmetro μ como alternativa e nada sabemos sobre σ. Então, não podemos controlar o erro de tipo II. As implicações dessa regra de decisão estão resumidas na Figura 12.3 e no Quadro 12.2.

Figura 12.3: Teste $H_0: \mu = 155$ vs $H_1: \mu < 155$, com RC = $]-\infty; 148{,}42]$.



Quadro 12.2: Resumo do teste H_0: $\mu = 155$, H_1: $\mu < 155$, com RC = $]-\infty, 148{,}42]$.

<table>
<tr><td rowspan="3">Origem Real
dos
Parafusos</td><td colspan="2">Decisão</td></tr>
<tr><td colspan="2">RC ——— 148,42 ——— $\bar{x}$</td></tr>
<tr><td>→ não B</td><td>→ B</td></tr>
<tr><td>B</td><td>Erro tipo I, $\alpha = 5\%$</td><td>Sem erro</td></tr>
<tr><td>não B</td><td>Sem erro</td><td>Erro tipo II, $\beta = ?$</td></tr>
</table>

Podemos reescrever as hipóteses nessa situação da seguinte maneira:

$$H_0: \mu = 155$$
$$H_1: \mu < 155$$

O cálculo de β depende do valor de μ, que não é especificado. Mas podemos considerar a seguinte e importante função.

Definição. A função *característica de operação* (função CO) do teste acima é definida como

$$\beta(\mu) = P(\text{aceitar } H_0 | \mu) = P(\bar{X} > 148{,}42 \,|\, \mu).$$

Ou seja, $\beta(\mu)$ é a probabilidade de aceitar H_0, considerada como uma função de μ.

Usualmente, considera-se a função $\pi(\mu) = 1 - \beta(\mu)$, que é a probabilidade de se rejeitar H_0, como função de μ. Essa função é chamada *função poder do teste* e será estudada abaixo com certo detalhe. Nesses casos consideramos que σ é o mesmo para todos os valores de μ.

Admitamos, agora, que não exista razão alguma para acreditarmos que a resistência média dos parafusos de B seja maior ou menor do que a de outros países. Isso irá nos levar a duvidar que os parafusos não são de B, se a média observada for muito maior ou muito menor do que 155. Esta situação corresponde à seguinte hipótese alternativa:

H_1: os parafusos não são de origem B ($\mu \neq 155$).

Aqui, a regra de decisão deverá indicar dois pontos $\bar{x}_{c_1}$ e $\bar{x}_{c_2}$, tais que:

Se $\bar{x}$ estiver entre $\bar{x}_{c_1}$ e $\bar{x}_{c_2}$, diremos que os parafusos são de origem B; se $\bar{x}$ estiver fora do intervalo, diremos que não são de origem B.

Fixado α, a probabilidade do erro I, existirão muitos valores que satisfazem a essa condição. Daremos preferência àquelas soluções $\bar{x}_{c_1}$ e $\bar{x}_{c_2}$, simétricas em relação à média. Veja a Figura 12.4.

Voltando ao nosso problema, e fixado α em 5%, temos

$$0{,}05 = P(\text{erro I}) = P(\bar{X} < \bar{x}_{c_1} \text{ ou } \bar{X} > \bar{x}_{c_2} \mid \bar{X} \sim N(155{,}16))$$
$$= P(Z < -1{,}96 \text{ ou } Z > 1{,}96),$$

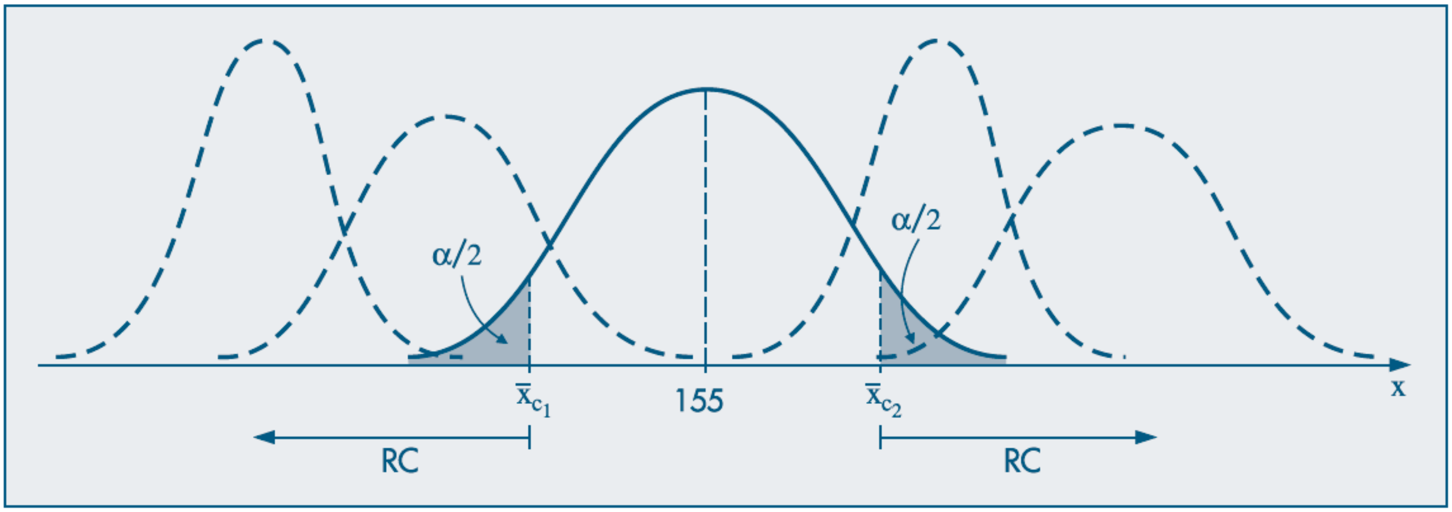
e daqui encontramos

$$-1{,}96 = (\bar{x}_{c_1} - 155)/4 \;\Rightarrow\; \bar{x}_{c_1} = 147{,}16$$

e

$$1{,}96 = (\bar{x}_{c_2} - 155)/4 \;\Rightarrow\; \bar{x}_{c_2} = 162{,}84.$$

Figura 12.4: Teste $H_0 : \mu = 155$ vs $H_1 : \mu \neq 155$.



Portanto, nesse caso, a região de rejeição da hipótese H_0 é (veja o Quadro 12.3)

$$RC = \{\bar{x} \in \mathbb{R} \,|\, \bar{x} < 147{,}16 \text{ ou } \bar{x} > 162{,}84\}.$$

Do apresentado nesta seção, vemos que, dependendo do grau de informação que se tem do problema, podemos ter regras de decisão unilaterais ou bilaterais. Na seção seguinte iremos dar os passos para a construção de um teste de hipótese.

Quadro 12.3: Resumo do teste H_0: $\mu = 155$, H_1: $\mu \neq 155$, com $RC =]-\infty, 147{,}16] \cup [162{,}84, +\infty[$.

Origem Real dos Parafusos	Decisão	
	RC 147,16	162,84 RC $\overline{x}$
	B	não B
B	Sem erro	Erro tipo II, $\beta = ?$
não B	Erro tipo I, $\alpha = 5\%$	Sem erro