Teste para proporção

Passo 1. Temos uma população e uma hipótese sobre a proporção p de indivíduos portadores de certa característica. Esta hipótese afirma que essa proporção é igual a certo valor p_0. Então,

$$H_0 : p = p_0.$$

O problema fornece informações sobre a alternativa, que pode ter uma das três formas abaixo:

(i) $H_1 : p \neq p_0$ (teste bilateral);
(ii) $H_1 : p > p_0$ (teste unilateral à direita); e
(iii) $H_1 : p < p_0$ (teste unilateral à esquerda).

Passo 2. Como vimos na seção 10.9, a estatística $\hat{p}$, a proporção amostral, tem uma distribuição aproximadamente normal, a saber,

$$\hat{p} \sim N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right).$$

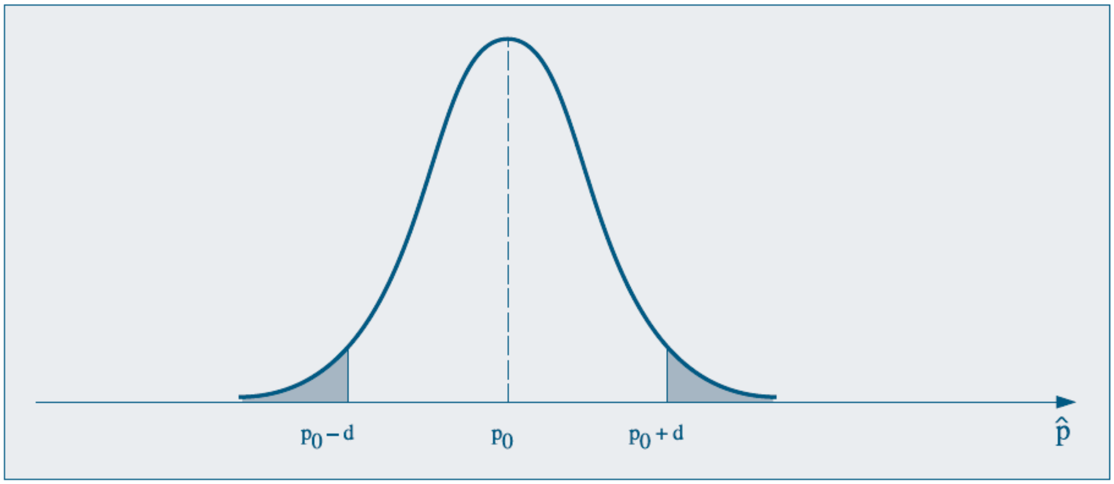
Passo 3. Fixado um valor de α, devemos construir a região crítica para p, sob a suposição de que o parâmetro definido por H_0 seja o verdadeiro. Ou seja, podemos escrever

$$\hat{p} \sim N\left(p_0, \frac{p_0(1-p_0)}{n}\right),$$

e, conseqüentemente, teremos a região crítica da Figura 12.6, supondo a alternativa (i) acima; sendo que $d = Z(1-\alpha/2)\sqrt{p_0(1-p_0)/n}$ e $Z(p)$ é o p-quantil da normal padrão.

O quarto e quinto passos irão depender da amostra, e o procedimento está descrito no exemplo seguinte.

Figura 12.6: Região crítica para o teste $H_0 : p = p_0$ vs $H_1 : p \neq p_0$.



Exemplo 12.3. Uma estação de televisão afirma que 60% dos televisores estavam ligados no seu programa especial da última segunda-feira. Uma rede competidora deseja contestar essa afirmação e decide usar uma amostra de 200 famílias para um teste. Qual deve ser o procedimento adotado para avaliar a veracidade da afirmação da estação? No passo 4 a seguir daremos o resultado da amostra, pois é importante ficar claro que esse resultado não deve influenciar a escolha da alternativa.

Passo 1. Vamos colocar à prova a afirmação da estação, isto é,

$$H_0 : p = 0{,}60.$$

Sabemos que, se essa hipótese não for verdadeira, espera-se uma proporção menor, nunca maior. A estação divulgaria o máximo possível. Isso nos leva à hipótese alternativa

$$H_1 : p < 0{,}60.$$

Passo 2. A estatística a ser usada é $\hat{p}$, a proporção de 200 famílias que assistiram ao programa na última segunda-feira, e da teoria sabemos que

$$\hat{p} \sim N\left(p, \frac{p(1-p)}{200}\right).$$

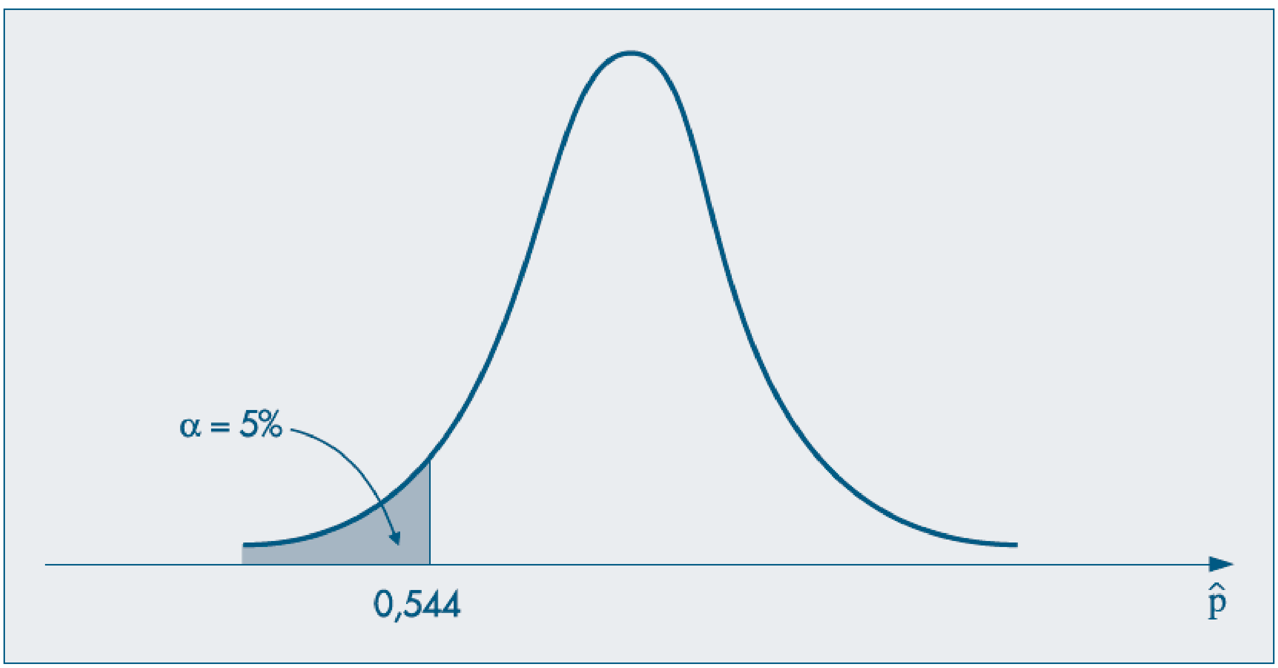
Passo 3. Fixaremos $\alpha = 0{,}05$ e sob a suposição que H_0 seja verdadeira,

$$\hat{p} \sim N(0{,}60,\ 0{,}24/200),$$

o que irá fornecer a região crítica (veja a Figura 12.7)

$$\mathrm{RC} = \{\hat{p} \in \mathbb{R} \mid \hat{p} \leqslant 0{,}544\}.$$

Figura 12.7: Região crítica para o teste $H_0 : p = 0{,}60$ vs $H_1 : p < 0{,}60$ do Exemplo 12.3.



De fato, devemos achar o valor $\hat{p}_c$, tal que $P(\hat{p} \leqslant \hat{p}_c) = 0{,}05$, e usando a aproximação normal acima, teremos

$$P\left(Z \leqslant \frac{\hat{p}_c - 0{,}60}{\sqrt{0{,}24/200}}\right) = 0{,}05,$$

o que implica

$$\frac{\hat{p}_c - 0{,}60}{\sqrt{0{,}24/200}} = -1{,}645,$$

o valor $-1{,}645$ sendo obtido da normal padronizada. Segue-se que $\hat{p}_c = 0{,}544$, correspondendo à região crítica acima.

Passo 4. Admitamos que, da pesquisa feita com as 200 famílias, obtivemos 104 pessoas que estavam assistindo ao programa. A proporção da amostra será $\hat{p} = 104/200 = 0{,}52$.

Passo 5. Do resultado do passo anterior, vemos que $0{,}52 \in RC$; portanto, somos levados a rejeitar H_0. Isto é, há evidências que a audiência do programa de segunda-feira não foi de 60% e sim inferior a esse número.

Valor-p (nível descritivo)

O método de construção de um teste de hipóteses, descrito nas seções anteriores, parte da fixação do nível de significância α. Pode-se argumentar que esse procedimento pode levar à rejeição da hipótese nula para um valor de α e à não-rejeição para um valor menor. Outra maneira de proceder consiste em apresentar a *probabilidade de significância* ou *nível descritivo* ou ainda *valor-p* do teste. Os passos são muito parecidos aos já apresentados; a principal diferença está em não construir a região crítica. O que se faz é indicar a probabilidade de ocorrer valores da estatística mais extremos do que o observado, sob a hipótese de H_0 ser verdadeira.

Exemplo 12.5. Voltemos ao Exemplo 12.3, onde

$$H_0 : p = 0{,}60.$$

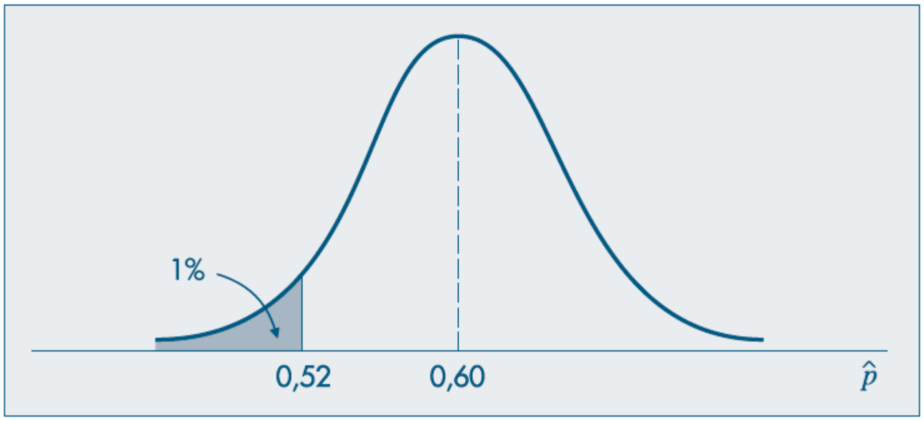
Como vimos, admitindo essa hipótese verdadeira, $\hat{p} \sim N(0{,}60;\, 0{,}24/200)$. Colhida a amostra obtivemos $\hat{p}_0 = 104/200 = 0{,}52$. Portanto, podemos calcular qual a probabilidade de ocorrerem valores de $\hat{p}$ mais desfavoráveis para H_0 do que esse. É evidente que quanto menor for $\hat{p}$, maior será a evidência contra $H_0 : p = 0{,}60$. Assim, calculemos

$$\begin{aligned} P(\hat{p} < 0{,}52 \mid p = 0{,}60) &= P\left(Z < \frac{\sqrt{200}(0{,}52 - 0{,}60)}{\sqrt{0{,}24}}\right) \\ &= P(Z < -2{,}30) = 0{,}01 = 1\%. \end{aligned}$$

Esse resultado mostra que, se a audiência do programa fosse de 60% realmente, a probabilidade de encontrarmos uma amostra de 200 famílias com 52% ou menos de audiência é de 1%. Isso sugere que, ou estamos diante de uma amostra rara de ocorrer, 1 em 100, ou então a hipótese formulada não é aceitável. Nesse caso, somos levados a essa segunda opção, ou seja, os dados da amostra sugerem que a hipótese H_0 deve ser rejeitada.

O procedimento está ilustrado na Figura 12.11. O valor-p do teste será $\hat{\alpha} = 0{,}01$.

Figura 12.11: Determinação do valor-p para o Exemplo 12.5.



Exemplo 12.7. Uma companhia de serviços de ônibus intermunicipais planejou uma nova rota para servir vários locais situados entre duas cidades importantes. Um estudo preliminar afirma que a duração das viagens pode ser considerada uma v.a. normal, com média igual a 300 minutos e desvio padrão 30 minutos. As dez primeiras viagens realizadas nessa nova rota apresentaram média igual a 314 minutos. Esse resultado comprova ou não o tempo médio determinado nos estudos preliminares?

Passo 1. Indicando por X a duração de cada viagem e por $\mu = E(X)$, queremos testar

$$H_0 : \mu = 300,$$
$$H_1 : \mu \neq 300.$$

Passo 2. Amostras de dez viagens terão média $\bar{X} \sim N(\mu, \ \sigma^2/10)$.

Passo 3. Sob a hipótese de que H_0 é verdadeira, e pelo fato de σ^2 ser conhecido (σ = 30), teremos

$$\bar{X} \sim N(300,\ 900/10).$$

Passo 4. Como o valor observado $\bar{x}_0 = 314$, podemos encontrar a probabilidade de ocorrerem amostras com valores de $\bar{X}$ mais extremos do que esse:

$$P(\bar{X} > 314) = P\left(Z > \frac{314 - 300}{9{,}49}\right) = P(Z > 1{,}48) = 0{,}07.$$

Como a distribuição de $\bar{X}$ é normal, portanto simétrica, tomamos $\hat{\alpha} = 0{,}14$. Nosso problema consiste em decidir se essa probabilidade corresponde ou não à chance de ocorrer um evento raro. Por ser uma probabilidade não muito pequena, podemos concluir que não existe muita evidência para rejeitar H_0. Assim, os estudos preliminares parecem estar corretos.

Teste sobre a Média de uma Normal com Variância Desconhecida

Consideremos a estatística

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}. \tag{12.8}$$

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S} \sim t(n-1). \tag{12.9}$$

Estamos, agora, em condições de testar as hipóteses

$$H_0 : \mu = \mu_0,$$
$$H_1 : \mu \neq \mu_0.$$

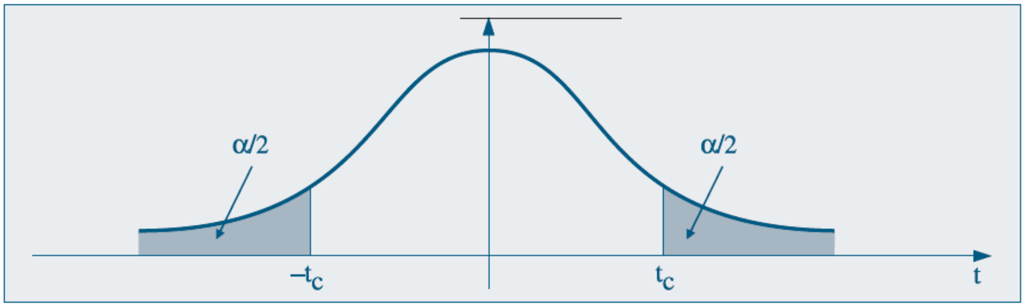
A hipótese alternativa poderia ser $\mu > \mu_0$ ou $\mu < \mu_0$, o que mudaria apenas a região de rejeição de bilateral para unilateral (à direita ou à esquerda, respectivamente).

A estatística a ser usada é

$$T = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{S}, \tag{12.10}$$

que sabemos agora ter uma distribuição t de Student com $(n - 1)$ graus de liberdade. Fixado o valor de α, podemos usar a Tabela V e encontrar o valor t_c, tal que $P(|T| < t_c) = 1 - \alpha$. Veja a Figura 12.14.

Figura 12.14: Valores críticos para o teste t.



Colhida a amostra de n indivíduos, calculamos os valores $\bar{x}_0$ e s_0^2 das estatísticas $\bar{X}$ e S^2, respectivamente, e depois o valor $t_0 = \sqrt{n}(\bar{x}_0 - \mu_0)/s_0$ de T. Se o valor dessa estatística for inferior a $-t_c$, ou superior a t_c, rejeita-se H_0. Caso contrário, aceita-se H_0.

Para a construção de intervalos de confiança, temos que

$$P\left(-t_\gamma < \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S} < t_\gamma\right) = \gamma,$$

da qual segue o intervalo de confiança

$$\text{IC}(\mu;\, \gamma) = \bar{X} \pm t_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}}, \tag{12.11}$$

muito parecido com aquele da variância conhecida.

Exemplo 12.10. Um fabricante afirma que seus cigarros contêm não mais que 30 mg de nicotina. Uma amostra de 25 cigarros fornece média de 31,5 mg e desvio padrão de 3 mg. No nível de 5%, os dados refutam ou não a afirmação do fabricante?

Passo 1. As hipóteses aqui são:

$$H_0 : \mu = 30,$$
$$H_1 : \mu > 30.$$

Passo 2. Supondo que X, a quantidade de nicotina por cigarro, tenha distribuição $N(\mu, \sigma^2)$, a estatística

$$T = \frac{\sqrt{25}(\overline{X} - 30)}{S}$$

terá distribuição $t(24)$.

Passo 3. Por ser um teste unilateral, devemos procurar o valor t_c tal que

$$P(T > t_c) = 0{,}05.$$

Da Tabela V, obtemos $t_c = 1{,}711$, ou seja, a região crítica para a estatística T é RC$=[1{,}711; +\infty[$.

Passo 4. O valor observado da estatística é

$$t_0 = \frac{5(31{,}5 - 30)}{3} = 2{,}5.$$

Passo 5. Como t_0 pertence à região crítica, rejeitamos H_0, ou seja, há evidências de que os cigarros contenham mais de 30 g de nicotina.

Outra maneira de proceder é calcular o valor-p, ou seja,

$$\hat{\alpha} = P(T > t_0|H_0) = P(T > 2{,}5|H_0) = 0{,}01.$$

Esse valor pequeno de $\hat{\alpha}$ leva à rejeição de H_0.

Para construir um IC(μ; 0,95), verificamos na Tabela V que o valor $t_\gamma = 2{,}064$ e, portanto,

$$\text{IC}(\mu; 0{,}95) = 31{,}5 \pm (2{,}064)\ 3/\sqrt{25},$$

ou seja,

$$\text{IC}(\mu; 0{,}95) =]30{,}26;\ 32{,}74[.$$