

# **- Testes Qui-quadrado - Aderência e Independência**

# 1. Testes de Aderência

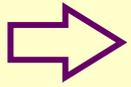
**Objetivo:** Testar a adequabilidade de um modelo probabilístico a um conjunto de dados observados

**Exemplo 1:** Segundo Mendel (geneticista famoso), os resultados dos cruzamentos de ervilhas amarelas redondas com ervilhas verdes enrugadas seguem uma distribuição de probabilidades dada por:

Resultado	Amarela redonda	Amarela enrugada	Verde redonda	Verde enrugada
Probabilidade	9/16	3/16	3/16	1/16

Uma amostra de 556 ervilhas resultantes de cruzamentos de ervilhas amarelas redondas com ervilhas verdes enrugadas foi classificada da seguinte forma:

Resultado	Amarela redonda	Amarela enrugada	Verde redonda	Verde enrugada
Frequência observada	315	101	108	32



Há evidências de que os resultados desse experimento estão de acordo com a distribuição de probabilidades proposta por Mendel?

4 categorias para os resultados dos cruzamentos:

*Amarelas redondas (AR), Amarelas enrugadas (AE), Verdes redondas (VR), Verdes enrugadas (VE).*

Segundo Mendel, a probabilidade de cada categoria é dada por:

Probabilidades:	AR	AE	VR	VE
	9/16	3/16	3/16	1/16

No experimento, 556 ervilhas foram classificadas segundo o tipo de resultado, fornecendo a tabela a seguir:

Tipo de resultado	Frequência observada
<i>AR</i>	315
<i>AE</i>	101
<i>VR</i>	108
<i>VE</i>	33
Total	556

**Objetivo:** Verificar se o modelo probabilístico proposto é adequado aos resultados do experimento.

Se o modelo probabilístico for adequado, a **frequência esperada** ervilhas do tipo **AR**, dentre as 556 observadas, pode ser calculada por:

$$556 \times P(AR) = 556 \times \mathbf{9/16} = 312,75$$

Da mesma forma, temos para o tipo **AE**,

$$556 \times P(AE) = 556 \times \mathbf{3/16} = 104,25$$

Para o tipo **VR** temos

$$556 \times P(VR) = 556 \times \mathbf{3/16} = 104,25$$

E, para o tipo **VE**,

$$556 \times P(VE) = 556 \times \mathbf{1/16} = 34,75$$

Podemos expandir a tabela de frequências dada anteriormente:

Tipo de resultado	Frequência observada	Frequência esperada
<i>AR</i>	315	312,75
<i>AE</i>	101	104,25
<i>VR</i>	108	104,25
<i>VE</i>	32	34,75
<b>Total</b>	556	556

→**Pergunta:** Podemos afirmar que os valores observados estão suficientemente próximos dos valores esperados, de tal forma que o modelo probabilístico proposto por Mendel é adequado aos resultados desse experimento?

# Testes de Aderência – Metodologia

Considere uma tabela de frequências, com  $k \geq 2$  categorias de resultados:

Categorias	Frequência Observada
1	$O_1$
2	$O_2$
3	$O_3$
$\vdots$	$\vdots$
$k$	$O_k$
Total	$n$

em que  $O_i$  é o total de indivíduos *observados* na categoria  $i$ ,  $i = 1, \dots, k$ .

Seja  $p_i$  a probabilidade associada à categoria  $i$ ,  $i = 1, \dots, k$ .

O objetivo do teste de aderência é testar as hipóteses

$$H : p_1 = p_{o1} , \quad \dots , p_k = p_{ok}$$

$A$  : existe pelo menos uma diferença

sendo  $p_{oi}$  a probabilidade especificada para a categoria  $i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , **fixada através do modelo probabilístico de interesse.**

Se  $E_i$  é o total de indivíduos *esperados* na categoria  $i$ , quando a hipótese  $H$  é verdadeira, então:

$$E_i = n \times p_{oi}, i = 1, \dots, k$$

Expandindo a tabela de frequências original, temos

<b>Categorias</b>	<b>Frequência observada</b>	<b>Frequência esperada sob <math>H</math></b>
1	$O_1$	$E_1$
2	$O_2$	$E_2$
3	$O_3$	$E_3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$k$	$O_k$	$E_k$
Total	$n$	$n$

Quantificação da distância entre as colunas de frequências:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

← Estatística do teste de aderência

Supondo  $H$  verdadeira,

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \sim \chi_q^2, \text{ aproximadamente,}$$

sendo que  $q = k - 1$  representa o número de graus de liberdade.

→ Em outras palavras, se  $H$  é verdadeira, a v.a.  $\chi^2$  tem distribuição aproximada qui-quadrado com  $q$  graus de liberdade.

**IMPORTANTE.:** Este resultado é válido para  $n$  **grande** e para

$$E_i \geq 5, i = 1, \dots, k.$$

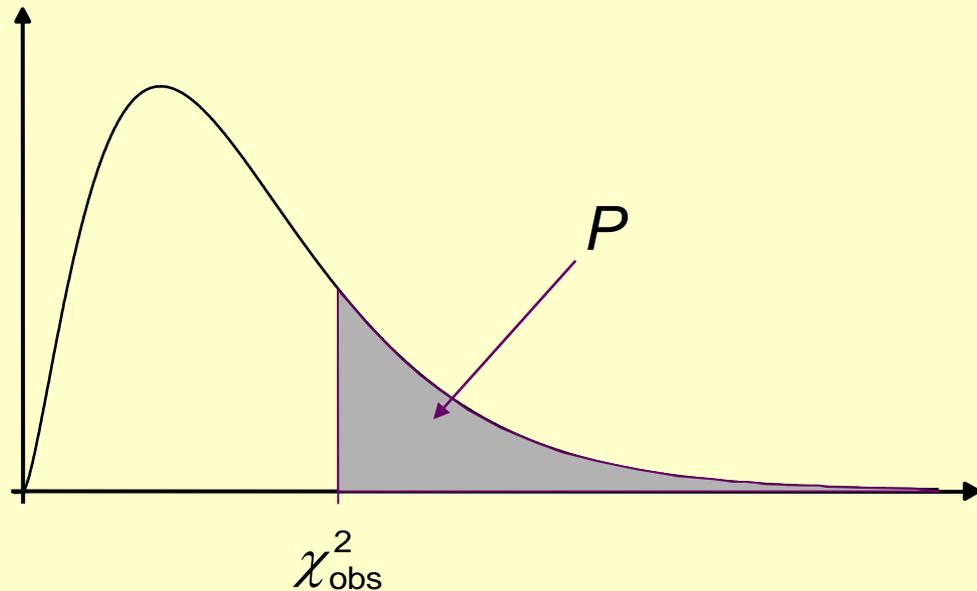
## Regra de decisão:

Pode ser baseada no nível descritivo ou valor  $P$ , neste caso

$$P = P(\chi_q^2 \geq \chi_{obs}^2),$$

em que  $\chi_{obs}^2$  é o valor calculado, a partir dos dados, usando a expressão apresentada para  $\chi^2$ .

Graficamente:



Se, para  $\alpha$  fixado, obtemos  $P \leq \alpha$ , **rejeitamos a hipótese  $H_0$ .**

## Exemplo (continuação): Cruzamentos de ervilhas

Hipóteses:

$H$  : O modelo probabilístico proposto por Mendel é adequado.

$A$  : O modelo proposto por Mendel não é adequado.

De forma equivalente, podemos escrever:

$H$ :  $P(AR) = 9/16$ ,  $P(AE) = 3/16$ ,  $P(VR) = 3/16$  e  $P(VE) = 1/16$ .

$A$ : ao menos uma das igualdades não se verifica.

A tabela seguinte apresenta os valores observados e esperados (calculados anteriormente).

Resultado	$O_i$	$E_i$
AR	315	312,75
AE	101	104,25
VR	108	104,25
VE	32	34,75
Total	556	556

Cálculo do valor da estatística do teste ( $k = 4$ ):

$$\chi_{obs}^2 = \sum_1^4 \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = \frac{(315 - 312,75)^2}{312,75} + \frac{(101 - 104,25)^2}{104,25} + \frac{(108 - 104,25)^2}{104,25} + \frac{(32 - 34,75)^2}{34,75} =$$

$$= 0,016 + 0,101 + 0,135 + 0,218 = 0,470.$$

Usando a distribuição de qui-quadrado com  $q = k - 1 = 3$  graus de liberdade, o nível descritivo é calculado por

$$P = P(\chi_3^2 \geq 0,470) = 0,925.$$

➔ **Conclusão:** Para  $\alpha = 0,05$ , como  $P = \mathbf{0,925} > \mathbf{0,05}$ , não há evidências para rejeitarmos a hipótese  $H$ , isto é, ao nível de significância de 5%, concluimos o modelo de probabilidades de Mendel se aplica aos resultados do experimento.

**Exemplo 2:** Deseja-se verificar se o número de acidentes em uma estrada muda conforme o dia da semana. O número de acidentes observado para cada dia de uma semana escolhida aleatoriamente foram:

<b>Dia da semana</b>	<b>No. de acidentes</b>
Seg	20
Ter	10
Qua	10
Qui	15
Sex	30
Sab	20
Dom	35

⇒ O que pode ser dito?

Hipóteses a serem testadas:

$H$ : O número de acidentes não muda conforme o dia da semana;

$A$ : Pelo menos um dos dias tem número diferente dos demais.

Se  $p_i$  representa a probabilidade de ocorrência de acidentes no  $i$ -ésimo dia da semana,

$H$ :  $p_i = 1/7$  para todo  $i = 1, \dots, 7$

$A$ :  $p_i \neq 1/7$  para pelo menos um valor de  $i$ .

Total de acidentes na semana:  $n = 140$ .

Logo, se  $H$  for verdadeira,

$$E_i = 140 \times 1/7 = 20, \quad i = 1, \dots, 7,$$

ou seja, esperamos 20 acidentes por dia.

Dia da semana	Nº. de acidentes observados ( $O_i$ )	Nº. esperado de acidentes ( $E_i$ )
Seg	20	20
Ter	10	20
Qua	10	20
Qui	15	20
Sex	30	20
Sab	20	20
Dom	35	20

Cálculo da estatística de qui-quadrado:

$$\chi_{obs}^2 = \sum_1^7 \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = \frac{(20 - 20)^2}{20} + \frac{(10 - 20)^2}{20} + \frac{(10 - 20)^2}{20} + \frac{(15 - 20)^2}{20} + \frac{(30 - 20)^2}{20} + \frac{(20 - 20)^2}{20} + \frac{(35 - 20)^2}{20} = 27,50$$

Neste caso, temos  $\chi^2 \sim \chi_6^2$ , aproximadamente.

O nível descritivo é dado por  $P = P(\chi_6^2 \geq 27,50) \cong 0,00012$ ,

**Conclusão:** Para  $\alpha = 0,05$ , temos que  $P = 0,0001 < \alpha$ . Assim, há evidências para **rejeitarmos**  $H_0$ , ou seja, concluimos ao nível de significância de 5% que o número de acidentes não é o mesmo em todos os dias da semana.

## 2. Testes de Independência

**Objetivo:** Verificar se existe independência entre duas variáveis medidas nas mesmas unidades experimentais.

**Exemplo 3:** A Associação de Imprensa do Estado de São Paulo fez um levantamento com 1300 leitores, para verificar se a preferência por leitura de um determinado jornal é independente do nível de instrução do indivíduo. Os resultados obtidos foram:

	Tipo de Jornal				
Grau de instrução	Jornal A	Jornal B	Jornal C	Outros	Total
1º Grau	10	8	5	27	50
2º Grau	90	162	125	73	450
Universitário	200	250	220	130	800
<b>Total</b>	<b>300</b>	<b>420</b>	<b>350</b>	<b>230</b>	<b>1300</b>

Vamos calcular proporções segundo os totais das colunas (poderiam também ser calculadas pelos totais das linhas. Temos a seguinte tabela:

	Tipo de Jornal				
Grau de instrução	Jornal A	Jornal B	Jornal C	Outros	Total
1º Grau	3,33%	1,90%	1,43%	11,74%	3,85%
2º Grau	30,00%	38,57%	35,71%	31,74%	34,62%
Universitário	66,67%	59,52%	62,86%	56,52%	61,54%
<b>Total</b>	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%

Independentemente da preferência por um tipo de jornal, 3,85% dos leitores têm o 1º Grau, 34,62% têm o 2º Grau e 61,54% são universitários.

Sob *independência* entre grau de instrução e preferência por um tipo de jornal, o número esperado de leitores que têm o 1º Grau e preferem o jornal A é igual a  $300 \times 0,0385 = 11,54$ , que têm o 2º Grau e preferem o Jornal A é  $300 \times 0,3462 = 103,85$  e que são universitários e preferem o jornal A é  $300 \times 0,6154 = 184,62$ .

Grau de instrução	Tipo de Jornal				Total
	Jornal A	Jornal B	Jornal C	Outros	
1º Grau	10 11,54 (3,85%)	8 16,15 (3,85%)	5 13,46 (3,85%)	27 8,85 (3,85%)	50
2º Grau	90 103,85 (34,62)%	162 145,38 (34,62%)	125 121,15 (34,62%)	73 79,62 (34,62%)	450
Universitário	200 184,62 (61,54%)	250 258,46 (61,54%)	220 215,38 (61,54%)	130 141,54 (61,54%)	800
<b>Total</b>	300	420	350	230	1300

As diferenças entre os valores observados e os esperados não são muito pequenas. Preferência por um tipo de jornal e grau de instrução parecem não ser *independentes*.

# Testes de Independência – Metodologia

Em geral, os dados referem-se a mensurações de duas características ( $A$  e  $B$ ) feitas em  $n$  unidades experimentais, que são apresentadas conforme a seguinte tabela:

$A \mid B$	$B_1$	$B_2$	...	$B_s$	Total
$A_1$	$O_{11}$	$O_{12}$	...	$O_{1s}$	$O_{1.}$
$A_2$	$O_{21}$	$O_{22}$	...	$O_{2s}$	$O_{2.}$
...	...	...	...	...	...
$A_r$	$O_{r1}$	$O_{r2}$	...	$O_{rs}$	$O_{r.}$
Total	$O_{.1}$	$O_{.2}$	...	$O_{.s}$	$n$

Hipóteses a serem testadas – **Teste de independência:**

$H$ :  $A$  e  $B$  são variáveis independentes

$A$ : As variáveis  $A$  e  $B$  não são independentes

→ Quantas observações devemos esperar em cada casela, se  $A$  e  $B$  forem independentes?

Sendo  $O_{ij}$  o total de observações na casela  $(i, j)$ , se  $A$  e  $B$  forem independentes, esperamos que, para todos os possíveis pares  $(A_i$  e  $B_j)$ :

$$O_{i1}/O_{.1} = O_{i2}/O_{.2} = \dots = O_{is}/O_{.s} = O_{i.}/n, i = 1, \dots, r$$

ou ainda

$$O_{ij}/O_{.j} = O_{i.}/n = 1, \dots, r, j = 1, \dots, s$$

de onde se deduz, finalmente, que

$$O_{ij} = (O_{i.} \times O_{.j})/n, i = 1, 2, \dots, r \text{ e } j = 1, 2, \dots, s.$$

Logo, o *número esperado de observações com as características  $(A_i$  e  $B_j)$* , entre as  $n$  observações, sob a hipótese de independência, é dado por

$$E_{ij} = \frac{O_{i.} \times O_{.j}}{n}$$

Distância entre os valores observados e os valores esperados sob a suposição de independência:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^r \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}}$$

**Estatística do teste de independência**

Supondo  $H$  verdadeira,

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}} \sim \chi_q^2$$

aproximadamente,

sendo  $q = (r - 1) \times (s - 1)$  o número de graus de liberdade.

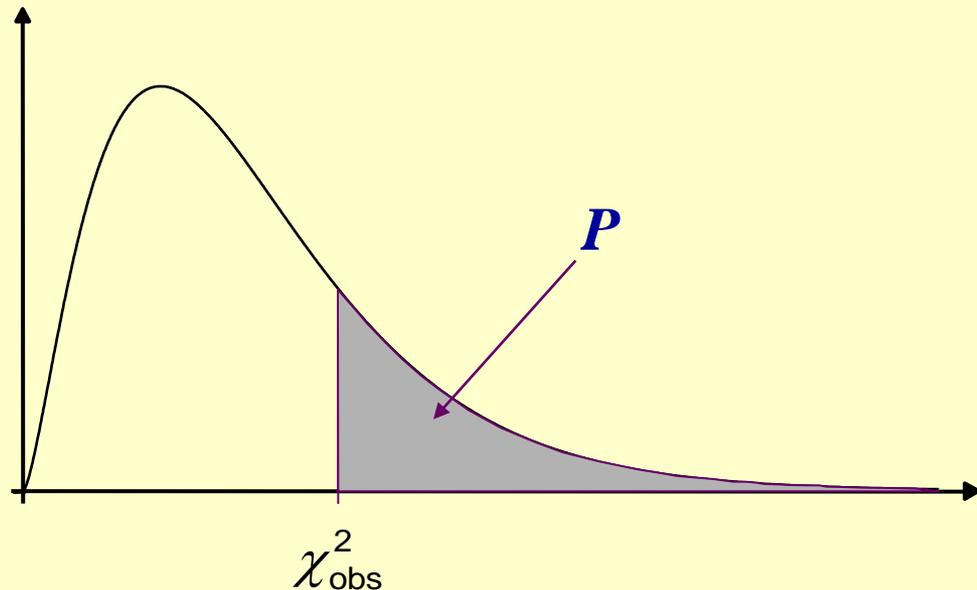
## Regra de decisão:

Pode ser baseada no valor  $P$  (nível descritivo), neste caso

$$P = P(\chi_q^2 \geq \chi_{obs}^2)$$

em que  $\chi_{obs}^2$  é o valor calculado, a partir dos dados, usando a expressão apresentada para  $\chi^2$ .

Graficamente:



Se, para  $\alpha$  fixado, obtemos  $P \leq \alpha$ , **rejeitamos a hipótese  $H$  de independência.**

**Exemplo (continuação):** Estudo da independência entre preferência por um tipo de jornal e grau de instrução. 1300 eleitores foram entrevistados ao acaso.

**Hipóteses**  $H$ : As variáveis preferência por um tipo de jornal e grau de instrução são independentes.

$A$ : Existe dependência entre as variáveis.

	Tipo de Jornal				
Grau de instrução	Jornal A	Jornal B	Jornal C	Outros	Total
1º Grau	10	8	5	27	50
2º Grau	90	162	125	73	450
Universitário	200	250	220	130	800
Total	300	420	350	230	1300

Exemplo do cálculo dos valores esperados sob  $H$  (independência):

• Número esperado de leitores que têm 1º Grau e preferem o jornal

A:

$$E_{11} = \frac{300 \times 50}{1300} = 11,54 \cdot$$

## Tabela de valores observados e esperados (entre parênteses)

Grau de instrução	Tipo de Jornal				Total
	Jornal A	Jornal B	Jornal C	Outros	
1º Grau	10 (11,54)	8 (16,15)	5 (13,46)	27 (8,85)	50
2º Grau	90 (103,85)	162 (145,38)	125 (121,15)	73 (79,62)	450
Universitário	200 (184,62)	250 (258,46)	220 (215,38)	130 (141,54)	800
Total	300	420	350	230	1300

2º Grau e prefere jornal B:

Universitário e prefere outros jornais:

$$E_{22} = \frac{420 \times 450}{1300} = 145,38$$

$$E_{34} = \frac{230 \times 800}{1300} = 141,54$$

Lembre-se:

$$E_{ij} = \frac{O_{i.} \times O_{.j}}{n_{..}}$$

## Cálculo da estatística de qui-quadrado:

Grau de instrução	Tipo de Jornal				Total
	Jornal A	Jornal B	Jornal C	Outros	
1º Grau	10 (11,54)	8 (16,15)	5 (13,46)	27 (8,85)	50
2º Grau	90 (103,85)	162 (145,38)	125 (121,15)	73 (79,62)	450
Universitário	200 (184,62)	250 (258,46)	220 (215,38)	130 (141,54)	800
<b>Total</b>	<b>300</b>	<b>420</b>	<b>350</b>	<b>230</b>	<b>1300</b>

$$\begin{aligned}
 \chi_{obs}^2 &= \frac{(10 - 11,54)^2}{11,54} + \frac{(8 - 16,15)^2}{16,15} + \frac{(5 - 13,46)^2}{13,46} + \frac{(27 - 8,85)^2}{8,85} \\
 &+ \frac{(90 - 103,85)^2}{103,85} + \frac{(162 - 145,38)^2}{145,38} + \frac{(125 - 121,15)^2}{121,15} + \frac{(73 - 79,62)^2}{79,62} \\
 &+ \frac{(200 - 184,62)^2}{184,62} + \frac{(250 - 258,46)^2}{258,46} + \frac{(220 - 215,38)^2}{215,38} + \frac{(130 - 141,54)^2}{141,54} \\
 &= 53,910.
 \end{aligned}$$

## Determinação do número de graus de liberdade:

- Categorias de Grau de instrução:  $s = 3$
- Categorias de Tipo de jornal:  $r = 4$

$$\rightarrow q = (r - 1) \times (s - 1) = 3 \times 2 = 6$$

O nível descritivo (valor  $P$ ):

$$P = P(\chi_6^2 \geq 53,910) < 0,0001$$

$\therefore$  Supondo  $\alpha = 0,05$ , temos  $P < \alpha$ . Assim, temos evidências para rejeitar a independência entre as variáveis grau de instrução e preferência por tipo de jornal ao nível de 5% de significância.