

MAE-212: Introdução à Probabilidade e à Estatística II

Aula 04

Inferência Estatística

Estimação

Inferência Estatística tem por objetivo fazer generalizações sobre **uma população**, com base nos dados de **uma amostra**.

Salientamos que dois problemas básicos nesse processo são:

- (a) **estimação de parâmetros**;
- (b) **teste de hipóteses sobre parâmetros**.

Parâmetro: funções de valores populacionais.

Estatística: funções de valores amostrais.

Exemplo 11.1. Uma amostra de $n = 500$ pessoas de uma cidade é escolhida, e a cada pessoa da amostra é feita uma pergunta a respeito de um problema municipal, para o qual foi apresentada uma solução pela prefeitura. A resposta à pergunta poderá ser SIM (favorável à solução) ou NÃO (contrária à solução). Deseja-se estimar a proporção de pessoas na cidade favoráveis à solução apresentada.

Se 300 pessoas responderam SIM à pergunta, então uma estimativa natural para essa proporção seria 300/500 ou 60%. Nossa resposta é baseada na suposição de que a amostra é representativa da população. Sabemos, também, que outra amostra poderia levar a outra estimativa. Conhecer as propriedades desses *estimadores* é um dos propósitos mais importantes da Inferência Estatística.

Definamos as v.a. X_1, \dots, X_n , tais que:

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{se a } i\text{-ésima pessoa na amostra responder SIM,} \\ 0, & \text{se a } i\text{-ésima pessoa na amostra responder NÃO,} \end{cases}$$

e seja $p = P$ (sucesso), onde aqui *sucesso* significa resposta SIM à questão formulada.

$$\hat{p} = \frac{Y_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} = \frac{\text{número de SIM}}{\text{número de indivíduos}} \quad (11.1)$$

$$E(\hat{p}) = p, \quad (11.2)$$

$$\text{Var}(\hat{p}) = p(1 - p)/n. \quad (11.3)$$

(11.2): estimador **não-viesado** (ou não-viciado) de p .

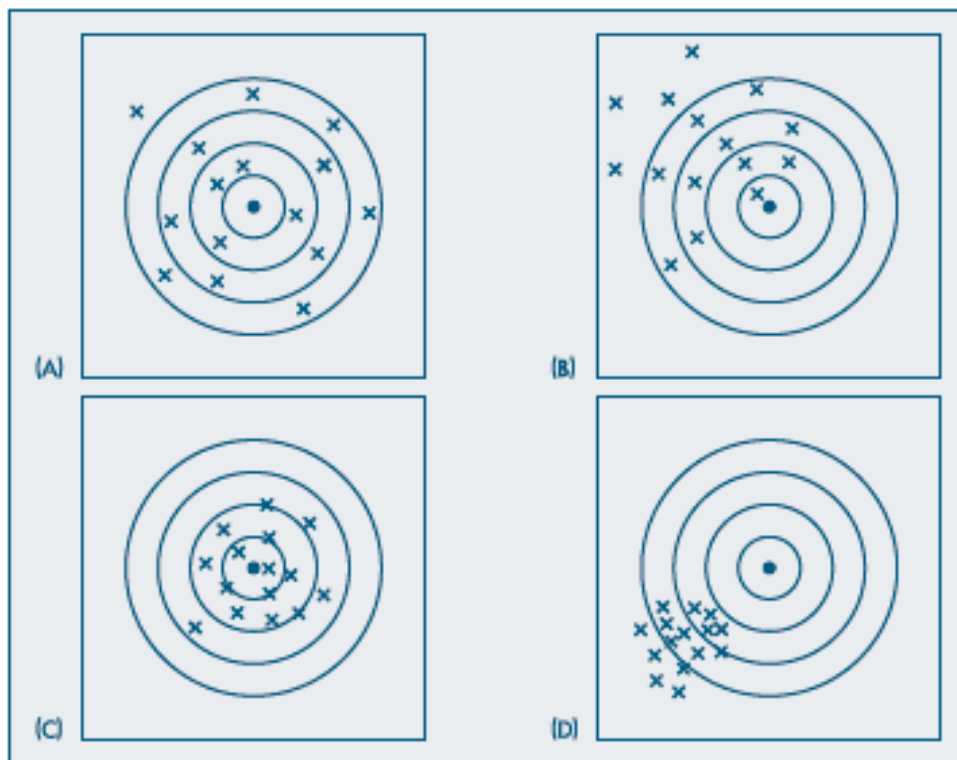
(11.3): estimador **consistente** de p .

Estimação

Em algumas situações, podemos ter mais de um estimador para um mesmo parâmetro, e desejamos saber qual deles é “melhor”. O julgamento pode ser feito analisando as propriedades desses estimadores.

Exemplo: Desejamos comprar um rifle e, após algumas seleções, restaram quatro alternativas, que chamaremos de rifles A, B, C e D. Foi feito um teste com cada rifle, que consistiu em fixá-lo num cavalete, mirar o centro de um alvo e disparar 15 tiros. Qual é a melhor arma?

Figura 11.1: Resultados de 15 tiros dados por 4 rifles.



Desse modo, podemos descrever cada arma da seguinte maneira:

Arma A: não-viesada, pouco acurada e baixa precisão.

Arma B: viesada, pouco acurada e baixa precisão.

Arma C: não-viesada, muito acurada e boa precisão.

Arma D: viesada, pouco acurada e alta precisão.

Critérios:

1. Em média acertar o alvo: A e C;
2. Não ser muito dispersivo: C e D.

Acurácia: mede a proximidade de cada observação do **valor alvo** que se procura atingir.

Precisão: mede a proximidade de cada observação da **média** de todas as observações

Estimação

Propriedades de estimadores

Definição: um **estimador** T do parâmetro θ é qualquer função das observações da amostra, ou seja,

$$T=f(X_1, \dots, X_n).$$

Definição: o estimador T é **não viesado** para θ se

$$E(T) = \theta$$

Definição: **Estimativa** é o valor assumido pelo estimador em uma particular amostra.

Uma sequência $\{T_n\}$ de estimadores de θ é **consistente** se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(T_n) = \theta \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(T_n) = 0$$

Definição: Se T e T' são dois estimadores **não-viesados** de um mesmo parâmetro θ , e ainda $\text{Var}(T) < \text{Var}(T')$, então T diz-se **mais eficiente** do que T' .

Exemplo 11.4. Considere uma população com N elementos e a variância populacional

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - \mu)^2, \quad (11.5)$$

onde $\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i$ é a média populacional. Um possível estimador para σ^2 , baseado numa AAS de tamanho n extraída dessa população, é

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2. \quad (11.6)$$

Mostremos que esse estimador é viesado. Pela fórmula (3.11), temos que

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}^2,$$

logo

$$E(\hat{\sigma}^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i^2) - E(\bar{X}^2).$$

Mas, pela definição de AAS e definição de variância de uma v.a., $E(X_i^2) = \text{Var}(X_i) + [E(X_i)]^2 = \sigma^2 + \mu^2$. Também, usando o Teorema 10.1, temos que $E(\bar{X}^2) = \text{Var}(\bar{X}) + [E(\bar{X})]^2 = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$.

Seque-se que

$$E(\hat{\sigma}^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\sigma^2 + \mu^2) - \left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2 \right),$$

ou seja,

$$E(\hat{\sigma}^2) = \frac{1}{n} (n(\sigma^2 + \mu^2)) - \frac{\sigma^2}{n} - \mu^2 = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} = \sigma^2 \left(1 - \frac{1}{n} \right).$$

Finalmente,

$$E(\hat{\sigma}^2) = \left(\frac{n-1}{n} \right) \sigma^2. \quad (11.7)$$

De (11.7) vemos que $\hat{\sigma}^2$ é viesado para σ^2 e o viés é dado por

$$V = V(\hat{\sigma}^2) = E(\hat{\sigma}^2) - \sigma^2 = -\frac{\sigma^2}{n}. \quad (11.8)$$

Como esse viés é negativo, o estimador $\hat{\sigma}^2$ em geral subestima o verdadeiro parâmetro σ^2 . Por outro lado, por (11.8), o viés diminui com n , ou seja, formalmente, para $n \rightarrow \infty$, o viés de $\hat{\sigma}^2$ tende a zero. Note também que o viés de $\hat{\sigma}^2$ é uma função de σ^2 . Uma estimativa do viés seria dada por

$$\hat{V} = -\frac{\hat{\sigma}^2}{n},$$

ou seja, substituímos o valor desconhecido de σ^2 por uma estimativa, como por exemplo $\hat{\sigma}^2$.

É fácil ver que para obter um estimador não-viesado de σ^2 basta considerar $(n/(n-1))\hat{\sigma}^2$, pois de (11.7) segue-se que

$$E\left(\frac{n}{n-1} \hat{\sigma}^2 \right) = \sigma^2.$$

Logo, se definirmos

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, \quad (11.9)$$

então $E(S^2) = \sigma^2$ e S^2 é um estimador não-viesado para σ^2 . Essa é a razão para se usar $n-1$, em vez de n , como denominador da variância da amostra.

Proposição. Uma sequência $\{T_n\}$ de estimadores de θ é **consistente** se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(T_n) = \theta \quad (11.11)$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(T_n) = 0 \quad (11.12)$$

Definição. Se T e T' são dois estimadores não viesados de um mesmo parâmetro θ , e ainda

$$\text{Var}(T) < \text{Var}(T'), \quad (11.16)$$

então T diz-se mais *eficiente* do que T' .

Exemplo 11.5. Vimos que S^2 , dado por (11.9), é não-viesado para σ^2 . É possível demonstrar, no caso que X_1, \dots, X_n são observações de uma distribuição $N(\mu, \sigma^2)$, que

$$\text{Var}(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1}. \quad (11.13)$$

Como $E(S^2) = \sigma^2$, e $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(S^2) = 0$, segue-se que S^2 é um estimador consistente para σ^2 . Dado o que foi dito acima, talvez fosse melhor escrever S_n^2 .

Exemplo 11.6. Vimos que $E(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2(1 - 1/n)$, de modo que $\lim_{n \rightarrow \infty} E(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2$. Também, de (11.6) e (11.13) e supondo que as observações são de uma distribuição normal $N(\mu, \sigma^2)$, temos que

$$\text{Var}(\hat{\sigma}^2) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \text{Var}(S^2) = \frac{n-1}{n^2} (2\sigma^4), \quad (11.14)$$

o que mostra que $\text{Var}(\hat{\sigma}^2) \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$, logo $\hat{\sigma}^2 = \hat{\sigma}_n^2$ também é consistente para σ^2 .

De (11.14) obtemos, também, que

$$\text{Var}(\hat{\sigma}^2) < \frac{2\sigma^4}{n-1} = \text{Var}(S^2). \quad (11.15)$$

Exemplo 11.7 Consideremos uma população normal X , com parâmetros μ e σ^2 . Queremos estimar a mediana dessa população. Por ser uma distribuição simétrica, sabemos que $\mu = \text{Md}(X)$. Definindo como \bar{X} a média e como md a mediana de uma amostra de tamanho n dessa população, qual dos dois estimadores é o melhor para estimar a mediana populacional?

Pelo que vimos no capítulo anterior,

$$\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n). \quad (11.17)$$

Pode-se demonstrar que a distribuição da mediana amostral pode ser aproximada por uma normal, especificamente,

$$\text{md} \sim N(\text{Md}(X), \pi\sigma^2/2n). \quad (11.18)$$

Vemos, portanto, que os dois estimadores são não viesados, mas \bar{X} é mais eficiente, pois

$$\text{Var}(\text{md})/\text{Var}(\bar{X}) = \pi/2 > 1.$$

Conclui-se que, para estimar a mediana dessa população, é preferível usar a média da amostra como estimador, o que contraria um pouco a nossa intuição.

Estimação

Propriedades de estimadores

$e = T - \theta$: o erro amostral que cometemos ao estimar o parâmetro θ da distribuição da v.a. X pelo estimador $T=f(X_1, \dots, X_n)$, baseado na amostra (X_1, \dots, X_n) .

Definição: Chama-se **erro quadrático médio (EQM)** do estimador T ao valor

$$EQM(T; \Theta) = E(e^2) = E(T - \theta)^2 = \text{Var}(T) + (\text{viés de } T)^2$$

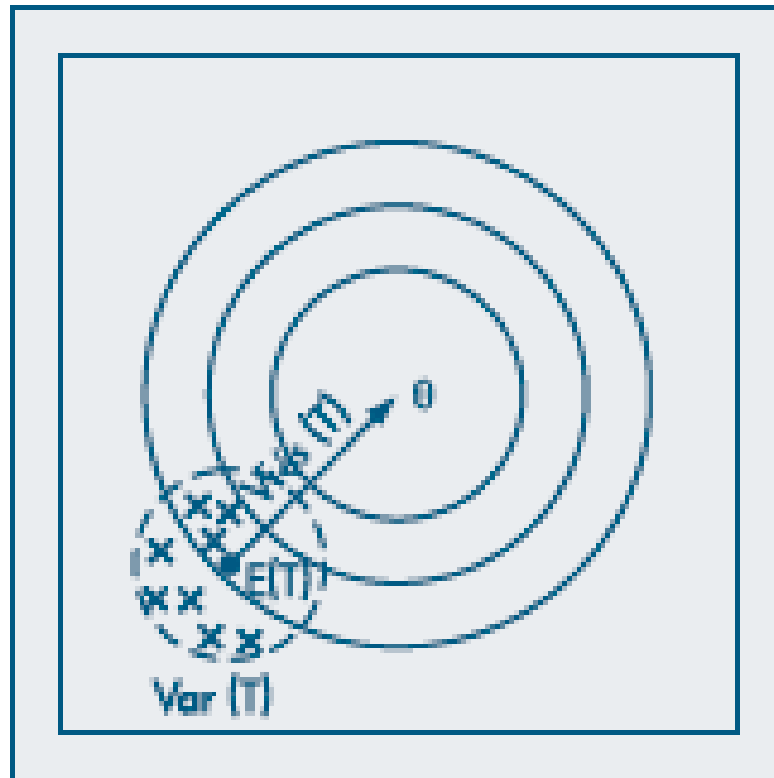
$$\begin{aligned} EQM(T; \theta) &= E(T - E(T) + E(T) - \theta)^2 \\ &= E(T - E(T))^2 + 2E[(T - E(T))(E(T) - \theta)] + E(E(T) - \theta)^2 \\ &= E(T - E(T))^2 + E(E(T) - \theta)^2, \end{aligned}$$

já que $E(T) - \theta$ é uma constante e $E(T - E(T)) = 0$. Podemos, pois, escrever,

$$EQM(T; \theta) = \text{Var}(T) + V^2, \quad (11.20)$$

em que $V = V(T) = E(T) - \theta$ indica, como vimos, o viés de T . A Figura 11.2 ilustra essas duas medidas, usando o caso das armas discutido no Exemplo 11.2.

Figura 11.2: Representação gráfica para o EQM.



Um estimador preciso tem variância pequena, mas pode ter EQM grande.