MAE 219: Introdução à Probabilidade e à Estatística I
6ª Lista de Exercícios - 1º Semestre de 2019 - FEA

Profa. Chang Chiann

1) Lança-se uma moeda perfeita 3 vezes, e sejam:
X = número de caras nos dois primeiros resultados.
Y = número de caras no último resultado.
S = número total de caras.

a) Através da distribuição conjunta de (X, Y) verifique se X e Y são independentes. Qual a covariância entre elas?
b) Para cada variável X, Y e S ache a esperança e a variância.
c) Existe alguma relação entre os parâmetros encontrados em (b) ? Isso sempre se verifica? Por quê?

2) Numa urna tem-se 4 tiras de papel numeradas 1, 3, 3 e 5. Uma tira de papel é sorteada, recolocada na urna, e uma segunda tira é sorteada. Sejam X_1 e X_2 respectivamente o primeiro e segundo número sorteado.

a) Determine a distribuição conjunta de X_1 e X_2.
b) Ache as distribuições marginais de X_1 e X_2. Elas são independentes?
c) Encontre a esperança e variância de X_1 , X_2 e $M = \dfrac{X_1 + X_2}{2}$.
d) Como seriam as suas respostas anteriores se em vez de uma tira de papel com cada número, tivessemos 1.000 tiras de papel com cada número?

3) Como seriam as respostas do problema anterior se a primeira tira de papel não é devolvida
antes de a segunda ser sorteada?

4) Seja X e Y duas variáveis aleatórias com a seguinte distribuição conjunta de probabilidades:

X \ Y	-1	0	1
-1	0	¼	0
0	¼	0	¼
1	0	¼	0

a) Calcule E(X), E(Y) e Cov(X, Y)
b) As variáveis aleatórias X e Y são independentes? Justifique.

5) Dois tetraedros com as faces numeradas de 1 a 4 (dados com 4 faces) são lançados e os números das faces voltadas para baixo são observados. Sejam as seguintes variáveis aleatórias:

X: maior dos números observados.
Y: menor dos números observados.
$Z = X + Y$.

a) Construa a tabela de probabilidade conjunta de X e Y.
b) Determine E(X), E(Y), Var(X), Var(Y) e Var(Z).

6) Se $E[X] = \mu$ e $Var(X) = \sigma^2$, escreva em função de μ e σ^2 as seguintes expressões.

a) $E(X^2)$ b) $E\{X (X - 1)\}$

7) Prove que $E\{(X - E(X)) (Y - E(Y))\} = E(XY) - E(X) E(Y)$
(o primeiro membro corresponde a outra maneira de definir a covariância entre duas variáveis).

8) Se X_1, X_2, X_3, X_4 são variáveis aleatórias independentes, tais que $E(X_i) = \mu$ e $Var(X_i) = \sigma^2$ para $i = 1, 2, 3, 4$, e definimos $M = (X_1+X_2+X_3+X_4)/4$, encontre E(M) e Var(M).