Técnicas Computacionais em Probabilidade e Estatística I

Aula V

Chang Chiann
MAE 5704- IME/USP
1º Sem/2008

Análise de 2 conjunto de dados

Modelo Probabilístico:

2 conjuntos de dados → amostras de duas v.a.s distintas.

Ex.: idade e peso

3 casos:

- 2 variáveis quantitativas;
- 2 variáveis qualitativas;
- 1 qualitativa e outra quantitativa.

Analisar dois conjuntos de dados por meio de:

a) Métodos numéricos, ou seja, calcular medidas de posição e dispersão para cada conjunto de dados separadamente e, depois, medidas de associação entre os dois conjuntos;

b) Métodos gráficos, a saber, aqueles já vistos para cada conjunto e, depois, gráficos para analisar as relações entre eles, como gráficos de dispersão e gráficos Q-Q(quantis-quantis).

Duas Variáveis Qualitativas

Os dados podem ser resumidos construindo-se uma tabela de distribuição de freqüências, que quantifica a freqüência das distintas categorias.

Variáveis qualitativas no arquivo *PULSE*

Ran

Smokes

Sex

Activity

Variáveis qualitativas no arquivo *PULSE*

```
MTB > Tally 'Sex' 'Smokes' 'Activity';
SUBC>  Counts;
SUBC>  Percents.
```

Summary Statistics for Discrete Variables

Sex	Count	Percent
1	57	61,96
2	35	38,04
N=	92	

Smokes	Count	Percent
1	28	30,43
2	64	69,57
N=	92	

Activity	Count	Percent
0	1	1,09
1	9	9,78
2	61	66,30
3	21	22,83
N=	92	

Podemos também construir tabelas de freqüências conjuntas (*tabelas de contingência*), relacionando duas variáveis qualitativas.

Exemplo 1: Há indícios de associação entre Sexo e Hábito de fumar?

	Hábito de Fumar		
Sexo	Fuma	Não Fuma	Total
Masculino	20	37	57
Feminino	8	27	35
Total	28	64	92

Qual o significado dos valores desta tabela?

Como concluir?

Verificar associação através da:

- porcentagem segundo as colunas, ou
- porcentagem segundo as linhas.

	Hábito de Fumar		
Sexo	Fuma	Não Fuma	Total
Masculino	71,43%	57,81%	61,96%
Feminino	28,57%	42,19%	38,04%
Total	100%	100%	100%

Qual o significado dos valores desta tabela?

Como concluir?

Variáveis Qualitativas

Gráficos

- Gráfico de setores
- Gráfico de barras

Gráfico de setores

Um círculo é dividido em tantos setores quantas forem as categorias da variável. A área de cada setor é proporcional à freqüência da categoria

Arquivo *PULSE* — Gráfico de setores para a variável *Activity*

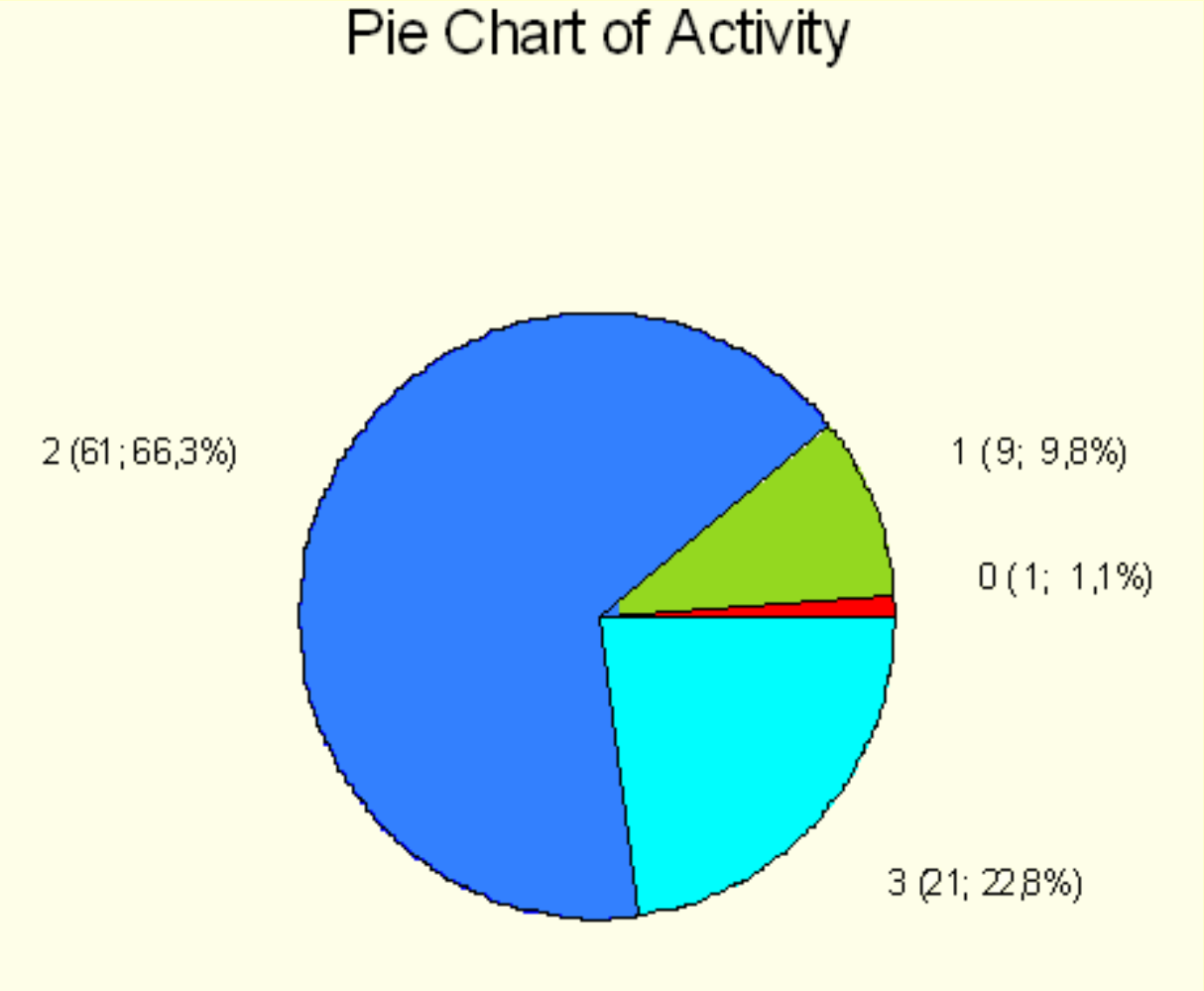
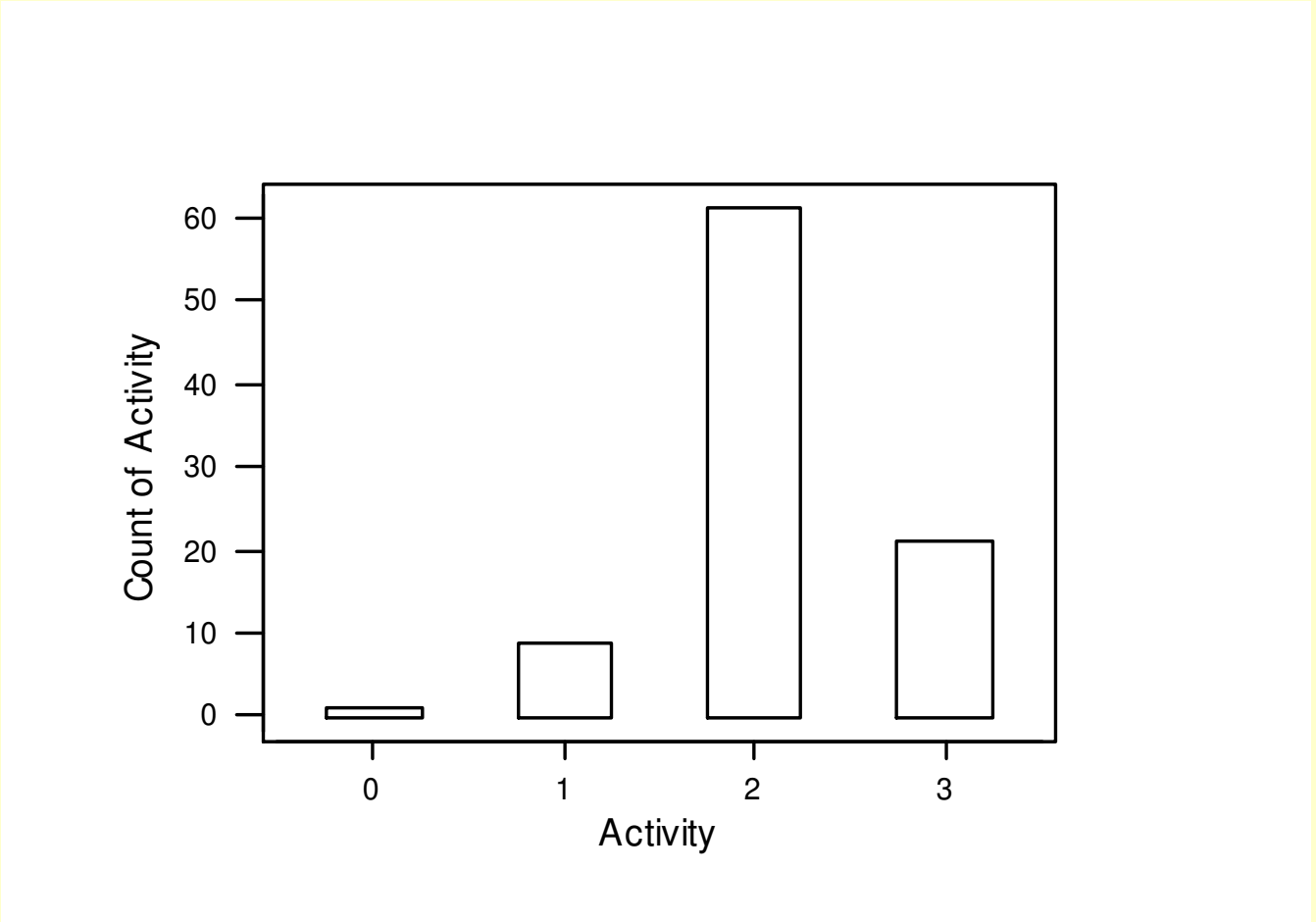


Gráfico de barras

Sobre um eixo, são representados retângulos, um para cada categoria da variável. A altura do retângulo é proporcional à freqüência da categoria

Arquivo *PULSE* — Gráfico de barras para a variável *Activity*

```
MTB > Chart C8
```



Testes de Independência

Objetivo: Verificar se existe independência entre duas variáveis medidas nas mesmas unidades experimentais.

Exemplo: Deseja-se verificar se existe dependência entre a renda e o número de filhos em famílias de uma cidade.

• 250 famílias escolhidas ao acaso forneceram a tabela a seguir:

Renda (R$)	Número de filhos				
	0	1	2	+ de 2	Total
menos de 2000	**15**	**27**	**50**	**43**	**135**
2000 a 5000	**25**	**30**	**12**	**8**	**75**
5000 ou mais	**8**	**13**	**9**	**10**	**40**
Total	**48**	**70**	**71**	**61**	**250**

Em geral, os dados referem-se a mensurações de duas características (*A* e *B*) feitas em *n* unidades experimentais, que são apresentadas conforme a seguinte tabela:

A \ B	B_1	B_2	…	B_s	Total
A_1	n_{11}	n_{12}	…	n_{1s}	$n_{1\bullet}$
A_2	n_{21}	n_{22}	…	n_{2s}	$n_{2\bullet}$
…	…	…	…	…	…
A_r	n_{r1}	n_{r2}	…	n_{rs}	$n_{r\bullet}$
Total	$n_{\bullet 1}$	$n_{\bullet 2}$	…	$n_{\bullet s}$	n

Hipóteses a serem testadas – **Teste de independência**:

H: *A* e *B* são variáveis independentes

A: As variáveis *A* e *B* não são independentes

→ Quantas observações devemos ter em cada casela, se *A* e *B* forem independentes?

Se *A* e *B* forem independentes, temos que, para todos os possíveis pares (A_i e B_j):

$$P(A_i \cap B_j) = p_{ij} = P(A_i) \times P(B_j), \text{ para } i = 1, 2, \ldots, r \text{ e } j = 1, 2, \ldots, s.$$

Logo, o ***número esperado de observações com as características*** (***A_i e B_j***), entre as *n* observações sob a hipótese de independência, é dado por

$$E_{ij} = n \times p_{ij} = n \times p_{i.} \times p_{.j} = n \times \frac{n_{i.}}{n} \times \frac{n_{.j}}{n},$$

sendo p_{ij} a proporção de observações com as características (A_i e B_j).

Assim,

$$E_{ij} = \frac{n_{i.} \times n_{.j}}{n}$$

O processo deve ser repetido para todas as caselas (*i*, *j*).

Distância entre os valores observados e os valores esperados sob a suposição de independência:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{r}\frac{(O_j - E_{ij})^2}{E_{ij}}$$

Estatística do teste de independência

em que $O_{ij} = n_{ij}$ representa o total de observações na casela (i, j).

Supondo H verdadeira,

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}} \sim \chi^2_q$$

sendo $q = (r - 1) \times (s - 1)$ graus de liberdade.

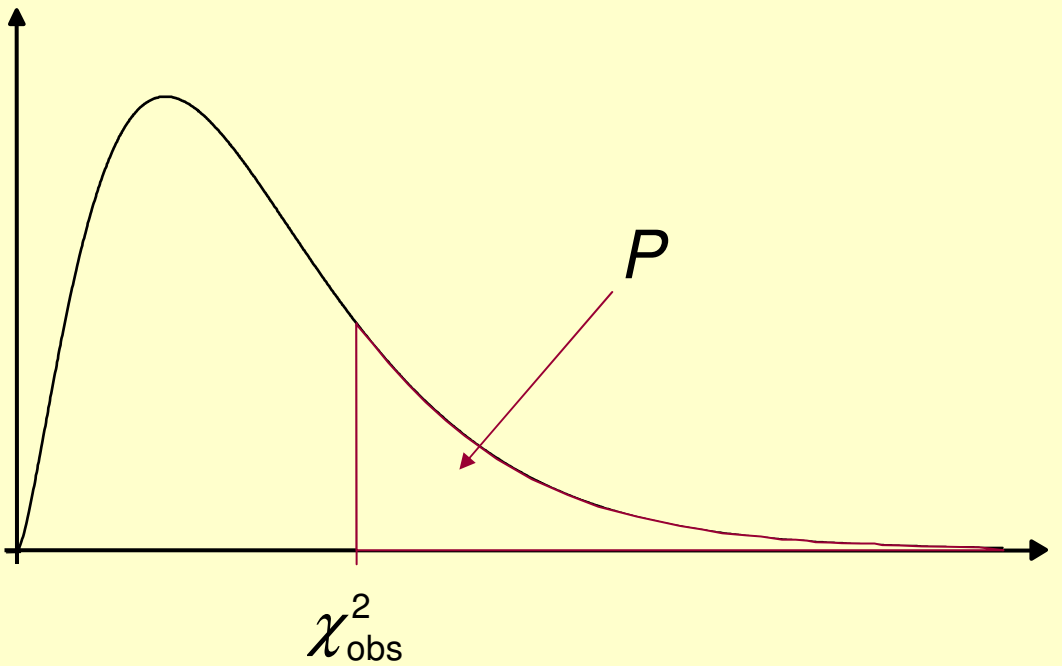
Regra de decisão:

Pode ser baseada no nível descritivo *P*, neste caso

$$P = P(\chi^2_q \geq \chi^2_{\text{obs}}),$$

em que χ^2_{obs} é o valor calculado, a partir dos dados, usando a expressão apresentada para χ^2 .

Graficamente:



Se, para α fixado, obtemos $P \leq \alpha$, rejeitamos a hipótese *H* de independência.

Exemplo (continuação):

Estudo da dependência entre renda e o número de filhos

- 250 famílias foram escolhidas ao acaso

Hipóteses *H*: O número de filhos e a renda são independentes

A: Existe dependência entre o número de filhos e a renda

Renda (R$)	Número de filhos				
	0	1	2	+ de 2	Total
menos de 2000	15	27	50	43	135
2000 a 5000	25	30	12	8	75
5000 ou mais	8	13	9	10	40
Total	48	70	71	61	250

Exemplo do cálculo dos valores esperados sob *H* (independência):

- Número esperado de famílias sem filhos e renda menor que R$ 2000:

$$E_{11} = \frac{48 \times 135}{250} = 25{,}92 \ .$$

Tabela de valores observados e esperados (entre parênteses)

Renda (R$)	Número de filhos				
	0	1	2	+ de 2	Total
menos de 2000	15(25,92)	27(37,80)	50(38,34)	43(32,94)	135
2000 a 5000	25(14,40)	30(21,00)	12(21,30)	8(18,30)	75
5000 ou mais	8(7,68)	13(11,20)	9(11,36)	10(9,76)	40
Total	48	70	71	61	250

1 filho e renda de R$ 2000 a R$ 5000:

$$E_{22} = \frac{70 \times 75}{250} = 21{,}00$$

2 ou + filhos e renda de R$ 5000 ou mais:

$$E_{34} = \frac{61 \times 40}{250} = 9{,}76$$

Lembre-se:

$$E_{ij} = \frac{n_{i\bullet} \times n_{\bullet j}}{n_{\bullet\bullet}}$$

Cálculo da estatística de qui-quadrado:

Renda (R$)	Número de filhos				
	0	1	2	+ de 2	Total
menos de 2000	15(25,92)	27(37,80)	50(38,34)	43(32,94)	135
2000 a 5000	25(14,40)	30(21,00)	12(21,30)	8(18,30)	75
5000 ou mais	8(7,68)	13(11,20)	9(11,36)	10(9,76)	40
Total	48	70	71	61	250

$$\chi^2_{obs} = \frac{(15-25{,}92)^2}{25{,}92} + \frac{(25-14{,}40)^2}{14{,}40} + \frac{(8-7{,}68)^2}{7{,}68} + \frac{(27-37{,}80)^2}{37{,}80} +$$
$$+ \frac{(30-21{,}00)^2}{21{,}00} + \frac{(13-11{,}20)^2}{11{,}20} + \frac{(50-38{,}34)^2}{38{,}34} + \frac{(12-21{,}30)^2}{21{,}30} +$$
$$+ \frac{(12-21{,}30)^2}{21{,}30} + \frac{(9-11{,}36)^2}{11{,}36} + \frac{(43-32{,}94)^2}{32{,}94} + \frac{(8-18{,}30)^2}{18{,}30} +$$
$$+ \frac{(10-9{,}76)^2}{9{,}76} = 36{,}62 \ .$$

Determinação do número de graus de liberdade:

- Categorias de renda: $r = 3$
- Categorias de nº de filhos: $s = 4$

$\Rightarrow q = (r-1)\times(s-1) = 2\times 3 = 6$

Logo, $\chi^2 \sim \chi^2_6$ e, supondo $\alpha = 0{,}05$, $P = P(\chi^2_6 \geq 36{,}62) = 0{,}000$

$\therefore$ Como $\boldsymbol{P} = 0{,}000 < \alpha = 0{,}05$, rejeitamos a independência entre número de filhos e renda familiar.

Os cálculos podem ser feitos diretamente no MINITAB:

Stat →Tables →Chi-Square test

Uma medida da relação entre duas variáveis qualitativas é o coeficiente de contingência de Pearson, dado por:

$$c = \sqrt{\frac{\chi^2}{\chi^2 + n}}$$

Uma modificação de C é o coeficiente

$$T = \sqrt{\frac{\chi^2 / n}{(r-1)(s-1)}}$$

Que atinge o valor máximo(um) quando r=s.