

Previsão de Modelos ARIMA



CHANG CHIANN

1. Introdução

Considere um particular modelo ARIMA(p, d, q), o objetivo é prever um valor Z_{t+h} , $h \geq 1$ supondo que temos observações $\dots, Z_{t-2}, Z_{t-1}, Z_t$, até o instante t que é chamado *origem* das previsões.

A previsão de *origem* t e *horizonte* h será denotada por $\hat{Z}_t(h)$

Iremos assumir que $X_t = (1 - B)^d Z_t$ é estacionário e invertível e os parâmetros do modelo são conhecidos.

Vamos supor o modelo de ARIMA(p, d, q) escritos nas três formas básicas com $t+h$ no lugar de t :

(a) Forma de equação de diferenças:

$$Z_{t+h} = \varphi_1 Z_{t+h-1} + \dots + \varphi_p Z_{t+h-p} - \theta_1 a_{t+h-1} - \theta_2 a_{t+h-2} - \dots - \theta_q a_{t+h-q} + a_{t+h}; \quad (1.1)$$

(b) Forma de choques aleatórios

$$Z_{t+h} = \sum_{j=-\infty}^{t+h} \psi_{t+h-j} a_j = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j a_{t+h-j}, \quad (1.2)$$

onde $\psi_0 = 1$.

(c) Forma invertida

$$Z_{t+h} = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j Z_{t+h-j} + a_{t+h}, \quad (1.3)$$

2. Previsão de EQM mínimo

É razoável supor que $\hat{z}_t(h)$ seja uma função das observações até o instante t , Z_t, Z_{t-1}, \dots e por (1.2) será uma função de a_t, a_{t-1}, \dots . Ainda mais, suponha que $\hat{z}_t(h)$ seja uma função *linear*. Se indicarmos a melhor previsão por

$$Z_{t+h} = \psi_h^* a_t + \psi_{h+1}^* a_{t-1} + \psi_{h+2}^* a_{t-2} + \dots \quad (2.1)$$

Queremos determinar os pesos ψ_j^* que minimizem o EQM da previsão. Este é dado por

$$E[Z_{t+h} - \hat{z}_t(h)]^2 = E\left[\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j a_{t+h-j} - \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{h+j}^* a_{t-j}\right]^2 = E\left[\sum_{j=-h}^{\infty} \psi_{h+j} a_{t-j} - \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{h+j}^* a_{t-j}\right]^2,$$

usando (1.2) e (2.1).

O erro de previsão é dado por

$$e_t(h) = Z_{t+h} - \hat{z}_t(h) = \psi_0 a_{t+h} + \psi_1 a_{t+h-1} + \dots + \psi_{h-1} a_{t+1} + \sum_{j=0}^{\infty} (\psi_{h+j} - \psi_{h+j}^*) a_{t-j} \quad (2.2)$$

Portanto,

$$E[e_t(h)]^2 = (1 + \psi_1^2 + \dots + \psi_{h-1}^2) \sigma_a^2 + \sum_{j=0}^{\infty} (\psi_{h+j} - \psi_{h+j}^*)^2 \sigma_a^2, \quad (2.3)$$

devido ao fato de que os a_t são **não-correlacionados**.

Segue-se que (2.3) é minimizado se $\psi_{h+j}^* = \psi_{h+j}$, $j = 0, 1, 2, \dots$, e um h fixo.

Portanto, a **previsão de erro quadrático médio (EQM) mínimo** é dada por

$$\hat{z}_t(h) = \psi_h a_t + \psi_{h+1} a_{t-1} + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{h+j} a_{t-j} \quad (2.4)$$

E o erro de previsão (2.2) por

$$e_t(h) = a_{t+h} + \psi_1 a_{t+h-1} + \dots + \psi_{h-1} a_{t+1} \quad (2.5)$$

Também,

$$Z_{t+h} = e_t(h) + \hat{z}_t(h), \quad h \geq 1 \quad (2.6)$$

Vamos denotar por

$$[Z_{t+h}] = E[Z_{t+h} | Z_t, Z_{t-1}, \dots] \quad (2.7)$$

Então, temos as seguintes conclusões:

(a) $\hat{z}_t(h) = [Z_{t+h}]$, usando (2.6); ou seja, a previsão de EQM mínimo é a esperança condicional de Z_{t+h} , dadas as observações passadas da série;

(b) de (2.5) temos que $[e_t(h)] = 0$ e a variância de erro de previsão é

$$P_{t+h}^t = V(h) = (1 + \psi_1^2 + \psi_2^2 + \dots + \psi_{h-1}^2) \sigma_a^2; \quad (2.8)$$

(c) o erro de previsão a um passo é

$$e_t(1) = Z_{t+1} - \hat{z}_t(1) = a_{t+1}, \quad (2.9)$$

o que nos diz que os erros de previsão a um passo são **não-correlacionados**;

(d) No entanto, os erros de previsão para intervalos de tempo maiores que 1 serão correlacionados, o mesmo com os erros de previsão para o mesmo *horizonte* h , de diferentes *origens* t e $t-j$.

3. Formas básicas de previsão

(a) Forma de equação de diferenças

$$\hat{z}_t(h) = \varphi_1 [Z_{t+h-1}] + \dots + \varphi_{p+d} [Z_{t+h-p-d}] - \theta_1 [a_{t+h-1}] - \theta_2 [a_{t+h-2}] - \dots - \theta_q [a_{t+h-q}] + [a_{t+h}];$$

Para $h \geq 1$.

Aqui vamos utilizar os seguintes fatos:

$$[Z_{t+h}] = \hat{z}_t(h), \quad h > 0;$$

$$[Z_{t+h}] = Z_{t+h}, \quad h \leq 0;$$

$$[a_{t+h}] = 0, \quad h > 0;$$

$$[a_{t+h}] = a_{t+h}, \quad h \leq 0;$$

Exemplo 1: ARIMA(3,1,1).

(b) Forma de choques aleatórios

$$\hat{z}_t(h) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j [a_{t+h-j}],$$

onde $\psi_0 = 1$.

Exemplo 2: MA(1).

(c) Forma invertida

$$\hat{z}_t(h) = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j [Z_{t+h-j}] + [a_{t+h}].$$

Exemplo 3: MA(1)

4. Equação de previsão

O objetivo é prever os valores futuros de um série temporal, x_{n+m} , $m = 1, 2, \dots$, baseado em dados coletados até o presente, $x = \{x_n, x_{n-1}, \dots, x_1\}$.

Assumir que x_t estacionário e que o modelo ARIMA é conhecido. A previsão de erro quadrático médio (EQM) mínimo de x_{n+m} é dado por

$$x_{n+m}^n = E(x_{n+m} | x_n, x_{n-1}, \dots, x_1) \quad (4.1)$$

Inicialmente iremos focar em previsões que são funções lineares dos dados, isto é,

$$x_{n+m}^n = \alpha_0 + \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k, \quad (4.2)$$

onde $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ são números reais. Previsões lineares da forma (4.2) que minimizam o EQM de previsão são denominados de BLP (Best Linear Predictors).

Propriedade 4.1: BLP para processos estacionários (teoria de projeção).

Dado $x = \{x_n, x_{n-1}, \dots, x_1\}$, o BLP, $x_{n+m}^n = \alpha_0 + \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k$, de x_{n+m} , para $m \geq 1$, é obtido resolvendo

$$E[(x_{n+m} - x_{n+m}^n)x_k] = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (4.3)$$

com $x_0 = 1$.

As equações em (4.3) são chamadas **as equações de previsão**, e são usadas para obter os coeficientes $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n\}$.

Se $E(x_t) = \mu$, a 1ª eq. ($k=0$) de (4.3) implica $E[x_{n+m}^n] = E(x_{n+m}) = \mu$.

Tomando esperança em (4.2): $E[x_{n+m}^n] = \mu = \alpha_0 + \sum_{k=1}^n \alpha_k \mu$ ou $\alpha_0 = \mu(1 - \sum_{k=1}^n \alpha_k)$

Por isso, a forma de BLP é

$$x_{n+m}^n = \mu + \sum_{k=1}^n \alpha_k (x_k - \mu).$$

considerarmos o caso que $\mu = 0$, $\alpha_0 = 0$.

Caso $m=1$:

o BLP para x_{n+1} é

$$x_{n+1}^n = \Phi_{n1} x_n + \Phi_{n2} x_{n-1} + \dots + \Phi_{nn} x_1, \quad (4.4)$$

denotando $\alpha_k = \Phi_{n, n+1-k}$, para $k = 1, \dots, n$.

Pela **Prop. 1**, os coef. $\{\Phi_{n1}, \Phi_{n2}, \dots, \Phi_{nn}\}$ satisfazem

$$E[(x_{n+1} - \sum_{j=1}^n \Phi_{nj} x_{n+1-j}) x_{n+1-k}] = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Ou

$$\sum_{j=1}^n \Phi_{nj} \gamma(k-j) = \gamma(k), \quad k = 1, \dots, n \quad (4.5)$$

Em forma matricial,

$$\Gamma_n \Phi_n = \gamma_n, \quad (4.6)$$

com

$$\Gamma_n = \{\gamma(k-j)\}_{j,k=1}^n$$

$$\Phi_n = \{\phi_{n1}, \phi_{n2}, \dots, \phi_{nn}\}$$

$$\gamma_n = (\gamma(1), \dots, \gamma(n)).$$

$$\Phi_n = \Gamma_n^{-1} \gamma_n \quad (4.7)$$

$$x_{n+1}^n = \Phi_n' X, \quad (4.8)$$

com $x = \{x_n, x_{n-1}, \dots, x_1\}$.

Erro quadrático médio (EQM) da previsão:

$$P_{n+1}^n = E(x_{n+1} - x_{n+1}^n)^2 = \gamma(0) - \gamma_n' \Gamma_n^{-1} \gamma_n \quad (4.9)$$

Prove

Exemplo4: AR(2).

Para ARMA(p, q), (4.7) é complicada \Rightarrow algoritmo de Durbin-Levinson.

Exemplo 5: algoritmo de Durbin-Levinson

Caso $m > 1$:

o BLP para x_{n+m} é

$$x_{n+m}^n = \Phi_{n1}^{(m)} x_n + \Phi_{n2}^{(m)} x_{n-1} + \dots + \Phi_{nn}^{(m)} x_1, \quad (4.10)$$

os coef. $\{\Phi_{n1}^{(m)}, \Phi_{n2}^{(m)}, \dots, \Phi_{nn}^{(m)}\}$ satisfazem

$$E[(x_{n+m} - \sum_{j=1}^n \Phi_{nj}^{(m)} x_{n+1-j}) x_{n+1-k}] = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

$$\sum_{j=1}^n \Phi_{nj}^{(m)} \gamma(k-j) = \gamma(m+k-1), \quad k = 1, \dots, n \quad (4.11)$$

$$\Gamma_n \Phi_n^{(m)} = \gamma_n^{(m)}, \quad (4.12)$$

Com $\Gamma_n = \{\gamma(k-j)\}_{j,k=1}^n$; $\Phi_n^{(m)} = \{\Phi_{n1}^{(m)}, \Phi_{n2}^{(m)}, \dots, \Phi_{nn}^{(m)}\}$; $\gamma_n^{(m)} = (\gamma(m), \dots, \gamma(m+n-1))$

Erro quadrático médio (EQM) da previsão:

$$P_{n+m}^n = E(x_{n+m} - x_{n+m}^n)^2 = \gamma(0) - \gamma_n^{(m)'} \Gamma_n^{-1} \gamma_n^{(m)} \quad (4.13)$$

Observações:

1. Para n grande, as duas fórmulas:

$$[x_{t+m}] = E[x_{t+m} | x_t, x_{t-1}, \dots] \text{ e } x_{n+m}^n = E(x_{n+m} | x_n, x_{n-1}, \dots, x_1)$$

fornecem resultados semelhantes.

2. As previsões para um AR(p) são exatas, uma vez que

$$E[x_{t+m} | x_t, x_{t-1}, \dots] = E(x_{n+m} | x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n+1-p})$$

5. Atualização das previsões

Calcular as previsões de Z_{t+h+1} feitas a partir de duas origens:

$$\text{a) } t+1: \hat{z}_{t+1}(h) = \psi_h a_{t+1} + \psi_{h+1} a_t + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{h+j} a_{t+1-j}$$

$$\text{b) } t: \hat{z}_t(h+1) = \psi_{h+1} a_t + \psi_{h+2} a_{t-1} + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{h+1+j} a_{t-j}$$

$$\hat{z}_{t+1}(h) = \hat{z}_t(h+1) + \psi_h a_{t+1} \quad (4.14)$$

Assim, a previsão de Z_{t+h+1} , feita no instante t , pode ser atualizada quando um novo dado, Z_{t+1} , é observado. Deste modo, faremos a previsão de Z_{t+h+1} , na origem $t+1$, adicionando-se à $\hat{z}_t(h+1)$ um múltiplo do erro de previsão $a_{t+1} = Z_{t+1} - \hat{z}_t(1)$.

Exemplo 6: AR(1).

6. Intervalo de confiança

Em geral, o IC $(1-\alpha)\%$ é da forma

$$x_{n+m}^n \pm C_{\alpha/2} (P_{n+m}^n)^{1/2} \quad (4.15)$$

7. Transformações e previsões

$$Y_t = g(Z_t) \rightarrow \hat{Y}_t(\mathbf{h}) = g(\hat{Z}_t(\mathbf{h})) \rightarrow \hat{Z}_t(\mathbf{h}) = g^{-1}(\hat{Y}_t(\mathbf{h}))$$

Exemplos

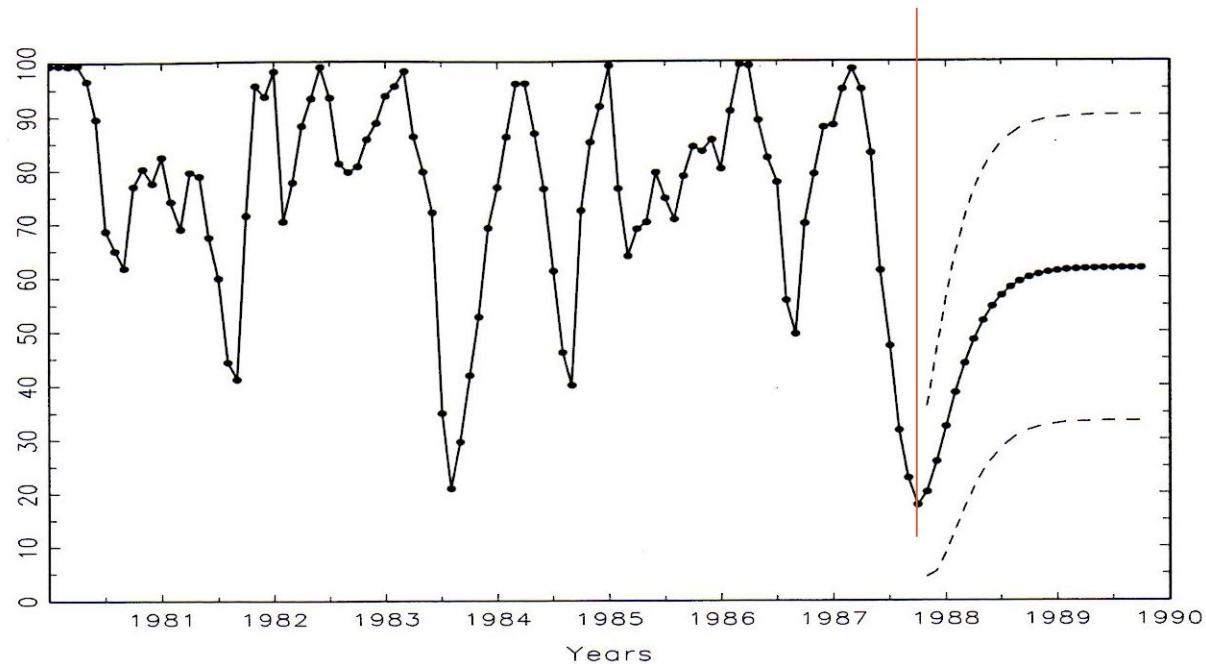
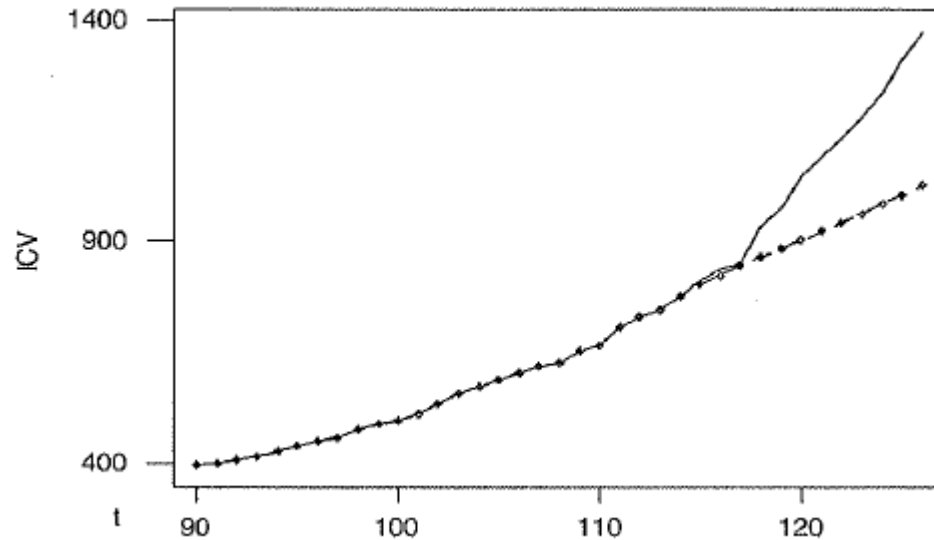


Gráfico de previsão (com intervalo de confiança \pm Erro Padrão) de 24 meses a partir de setembro de 1987 da série de população de peixes no Pacífico central devido a influencia do El Niño

x_t : população de peixes no Pacífico central nos anos 1950-1987.

dados mensais com $n = 453$.

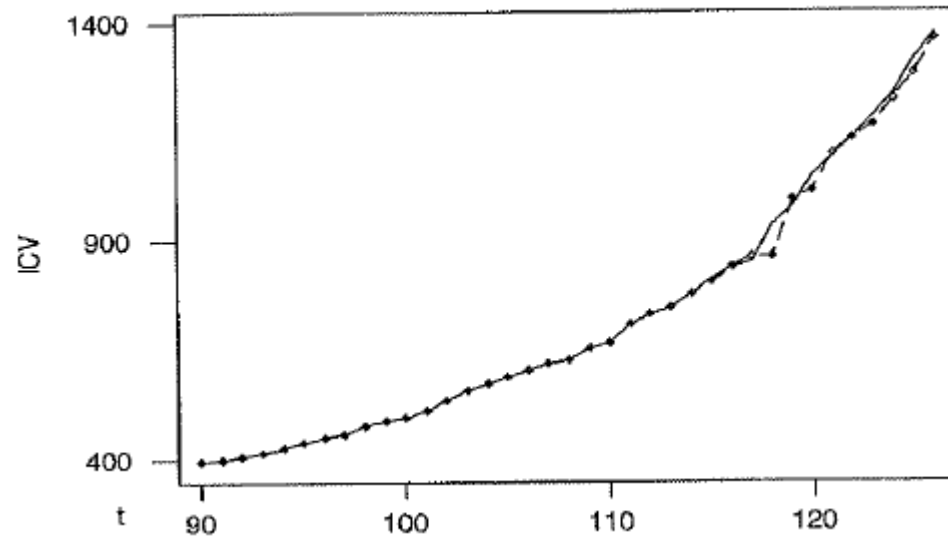
Modelo ajustado: $x_{n+m}^n = 6,74 + 1,35 x_{n+m-1}^n - 0,46 x_{n+m-2}^n$ com $\hat{\sigma}_a = 90,31$



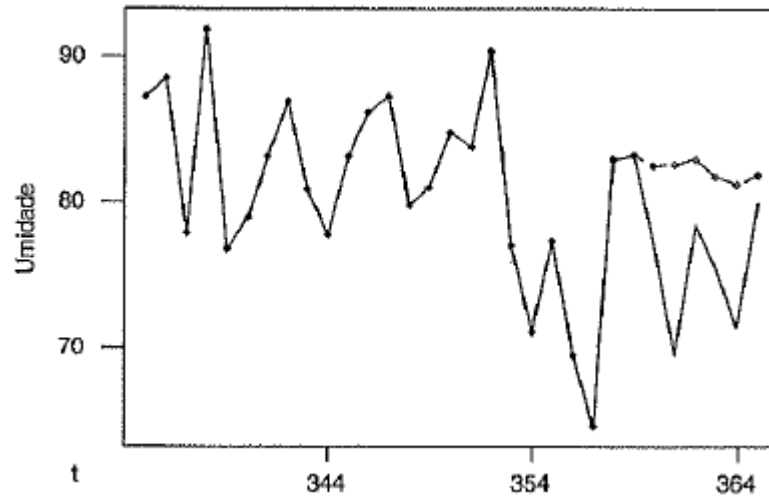
Valores observados e previsões (linha tracejada) para a série ICV com origem em julho de 79 ($t=114$), modelo ajustado ao $\ln(\text{ICV})$

Y_t : $\ln(\text{ICV})$ mensais de jan/70-jun/80. ICV – índice de custo de vida no município de São Paulo. $n=114$.

Modelo ajustado: $(1-0,5119B)(1-B)Y_t=0,01036+a_t$ com $\hat{\sigma}_a = 0,0000923$.



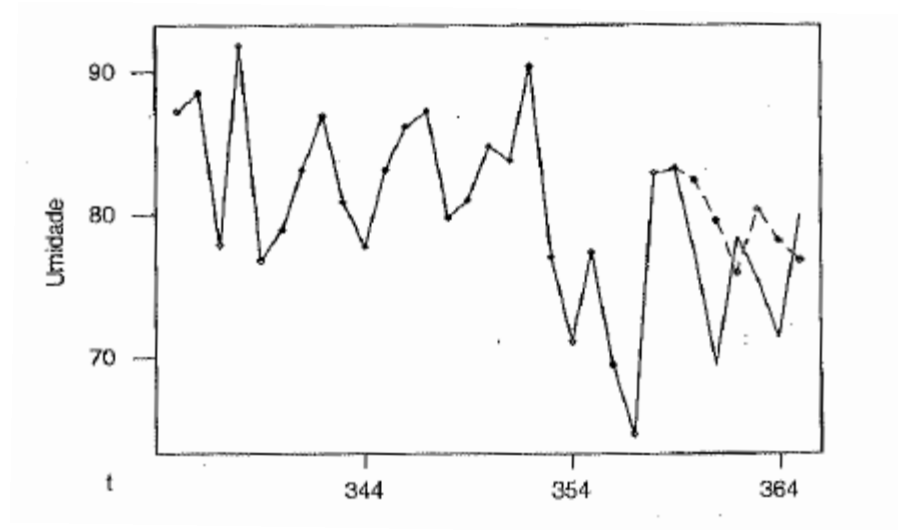
Valores observados e previsões (linha tracejada)
atualizadas para a série ICV, com origem em t=114



Valores observados e previsões (linha tracejada)
para a série umidade, com origem em 24/12/97
($t=358$), a partir do modelo AR(15) com θ_0

Z_t : **umidade relativa do ar(%)**, ao meio dia, na cidade de São Paulo, observações diárias de 1/jan-31/dez de 1997. $n = 358$.

Modelo ajustado: $(1-0,5713B+0,1015B^2-0,1846B^{15})Z_t=28,0147+a_t$
com $\hat{\sigma}_a = 44,4315$.



Previsões atualizadas para a série Umidade, a partir do modelo AR(15) com θ_0

Referências:

Morettin, P.A. e Tolo, C.M.C. (2004). Análise de Séries Temporais. Segunda edição. Editora Edgard Blücher Ltda.

Shumway, R.H. and Stoffer, D.S. (2005). Time Series Analysis and Its Applications With R Examples. Second Edition. Springer.