

**ANÁLISE DE VARIÂNCIA EM SÉRIES TEMPORAIS -  
COMPARAÇÃO DE COMPORTAMENTO DE RETORNOS EM  
DIVERSOS PORTFÓLIOS SETORIAIS**

## 1. Introdução

A formação de carteiras de investimentos procura minimizar o risco para um determinado valor de retorno esperado ou maximizar o retorno para um determinado nível de risco que se deseja assumir (Vinha e Chiann 2007). Portanto, o comportamento entre os retornos dos ativos é uma informação fundamental para otimizar uma carteira de investimento.

O presente trabalho tem por objetivo comparar os comportamentos de retornos financeiros de diversos portfólios setoriais, usando a técnica de análise de variância em séries temporais.

A análise de variância convencional para estudar as variações apresentadas nos dados cujas medidas respostas são séries temporais não é adequada, uma vez que nossos dados são frequentemente correlacionados, isto é, dependentes no tempo. A metodologia desenvolvida por Brillinger (1980, 1981) e Shumway e Stoffer (2006) foi utilizar a transformada de Fourier das séries em estudo, com o objetivo de eliminar a dependência entre as observações.

A análise de Fourier, que se utiliza do sistema ortogonal das funções senoidais, é provavelmente uma das ferramentas mais importantes para lidar com as correlações presentes em séries temporais estacionárias. Tal análise transforma a série para o domínio de frequências, onde os pontos adjacentes são assintoticamente independentes.

A transformação introduzida é a de Fourier e as observações transformadas além de serem assintoticamente não correlacionadas também terão uma distribuição aproximadamente Normal. Assim, poderão ser aplicadas as técnicas convencionais da análise de variância.

## 2. Conceitos

Neste capítulo, baseado em Morettin e Tolo (2006), Brockwell e Davis (1996), e Brillinger (1981) abordamos alguns conceitos fundamentais sobre a transformada de Fourier (análise espectral) e periodograma, bem como apresentamos estimadores assintoticamente não viciados da função espectral de uma série temporal.

### 2.1 Algumas Definições

Uma série temporal é uma sequência de observações de uma variável ao longo do tempo. Uma característica importante deste tipo de dados é que as observações vizinhas são dependentes, e o interesse é analisar e modelar esta dependência.

Além de ser uma ferramenta estatística, ela também é frequentemente usada nas áreas econômicas e de medicina, como preços diários de ações e eletrocardiograma.

A série temporal é dita ser *discreta* quando as observações são feitas em tempos específicos, por exemplo, valores diários de poluição na cidade de São Paulo. É considerada como *contínua* quando as observações são feitas continuamente no tempo, como registro de marés no porto de Santos, por exemplo.

De acordo com Morettin e Tolo (2006), há basicamente dois enfoques usados na análise de séries temporais. Em ambos, o objetivo é construir modelos para as séries, com propósitos determinados. No primeiro, a análise é feita no *domínio de tempo* e os modelos propostos são paramétricos (com um número finito de parâmetros). No segundo, é feita no *domínio de frequência*, e os modelos são não paramétricos (com um número infinito de parâmetros).

Neste trabalho, veremos a análise espectral via exponenciais (análise de Fourier), é um dos métodos não-paramétricos mais utilizados no domínio de frequência.

Os modelos utilizados para descrever séries temporais são processos estocásticos, que são processos controlados por leis probabilísticas.

**Definição 2.1:** Um *processo estocástico* é uma família  $X = \{X(t), t \in T\}$  e  $X(t)$  é uma variável aleatória definida num espaço de probabilidade  $(\omega, A, P)$ , indexado por um parâmetro  $t$ , onde  $t$  varia no conjunto arbitrário  $T$ , *espaço de parâmetro*.

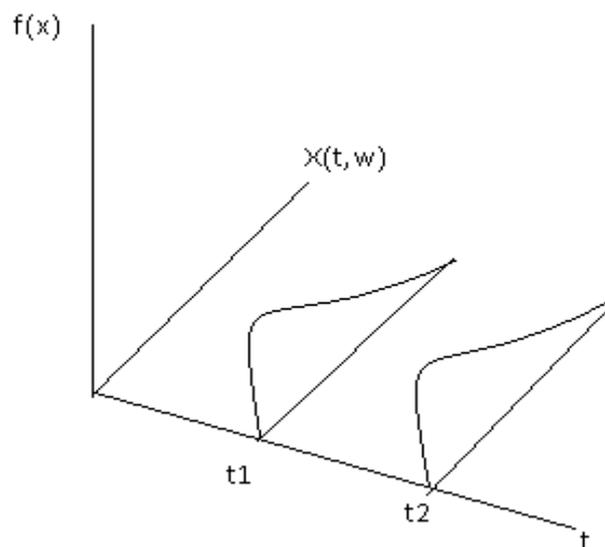


Figura 2.1: Cada variável  $X(t)$  é definida em  $(\omega, A, P)$ .

Como uma variável aleatória é uma função definida num espaço amostral  $\Omega$ . Então, na realidade, o processo estocástico  $X = \{X(t), t \in T\}$  é uma função de dois argumentos  $\{X(t, \omega), t \in T, \omega \in \Omega\}$ .

Para cada  $t \in T$ , a função  $X(t, \cdot)$  é mensurável relativamente a  $A$ . Por outro lado, para cada  $\omega \in \Omega$  fixado, teremos uma função  $X(\cdot, \omega)$  de  $t: T \rightarrow R$ , que é chamada *trajetória, realização, função amostral do processo* ou *série temporal*.

Uma série temporal é uma particular realização do processo estocástico. Podemos entender um processo estocástico como uma família de trajetórias ao longo do tempo e observamos uma delas.

**Definição 2.2:** A função *distribuição n-dimensional* do processo estocástico  $\{X(t), t \in T\}$  é definida como:

$$F(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = P(X(t_1) \leq x_1, \dots, X(t_n) \leq x_n), \quad (2.1)$$

para todo  $n \geq 1$  e  $t_1, \dots, t_n \in T$ .

**Definição 2.3:** As funções *média* e *covariância* de um processo  $X(t)$  são dadas por:

$$\begin{aligned} E(X(t)) &= \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x; t) = \mu_x(t), & (2.2) \\ Cov[X(t_1), X(t_2)] &= \iint [x_1 - \mu_x(t_1)][x_2 - \mu_x(t_2)] dF(x_1, x_2; t_1, t_2) \\ &= E(X(t_1)X(t_2)) - E(X(t_1))E(X(t_2)) \\ &= \gamma(t_1, t_2), & (2.3) \end{aligned}$$

Se  $t_1 = t_2 = t$ , temos a variância do processo:

$$Var(X(t)) = \int [x - \mu_x(t)]^2 dF(x; t) = E(X^2(t)) - E^2(X(t)) = \gamma(t). \quad (2.4)$$

A função de autocorrelação é definida por:

$$Cor(X(t_1), X(t_2)) = \rho(t_1, t_2) = \frac{Cov(X(t_1), X(t_2))}{\sqrt{Var(X(t_1))Var(X(t_2))}}. \quad (2.5)$$

**Definição 2.4:** Um processo estocástico  $X = \{X(t), t \in T\}$  é dito *estritamente estacionário*, se todas as distribuições finito-dimensionais (2.1) permanecem as mesmas sob translações no tempo, ou seja:

$$F(x_1, \dots, x_n; t_1 + \tau, \dots, t_n + \tau) = F(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n), \quad (2.6)$$

para  $t_1, \dots, t_n, t_1 + \tau, \dots, t_n + \tau \in T$ .

**Definição 2.5:** Um processo estocástico  $X = \{X(t), t \in T\}$  é *estacionário de segunda ordem*, ou *fracamente estacionário*, ou ainda *estacionário em sentido amplo* se:

$$(a) E(X(t)) = \mu_x, \text{ constante, } \forall t \in T;$$

$$(b) E(X^2(t)) < \infty, \forall t \in T;$$

(c)  $Cov(X(t_1), X(t_2)) = \gamma(t_1, t_2) = g(|t_1 - t_2|)$ , ou seja, a covariância é função somente da defasagem  $|t_1 - t_2|$ .

**Definição 2.6:** Seja  $X = \{X(t), t \in T\}$  um processo estacionário real com tempo discreto, de média zero e função de autocovariância denotada por  $\gamma_\tau = E(X_t, X_{t+\tau})$ .

$$(a) \gamma_0 > 0.$$

$$(b) \gamma_{-\tau} = \gamma_\tau.$$

$$(c) |\gamma_\tau| \leq \gamma_0.$$

(d)  $\gamma_\tau$  é não negativa definida, no sentido que

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_j a_k \gamma_{\tau_j - \tau_k} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_j a_k E(X_{\tau_j} X_{\tau_k}) \geq 0, \quad (2.7)$$

para quaisquer números reais  $a_1, \dots, a_n$ , e  $\tau_1, \dots, \tau_n$  de  $T$ .

**Definição 2.7:** Um processo  $X = \{X(t), t \in T\}$  diz-se *gaussiano* se para qualquer subconjunto  $t_1, \dots, t_n$  de  $T$ , o conjunto das variáveis aleatórias  $(X(t_1), \dots, X(t_n))$  tem uma distribuição normal *n-variada*.

**Definição 2.8:** Uma sequência de variáveis aleatórias  $\{\varepsilon(t), t = 0, \pm 1, \dots\}$ , tal que

$$(a) E(\varepsilon(t)) = \mu,$$

$$(b) Var(\varepsilon(t)) = \sigma^2,$$

$$(c) Cov(\varepsilon(t_1), \varepsilon(t_2)) = 0, \forall t_1, t_2 \in \{0, \pm 1, \dots\}, t_1 \neq t_2,$$

é chamada *ruído branco*. Usualmente,  $\mu = 0$ .

**Definição 2.9:** (a) Seja  $(X_1, \dots, X_r)$  uma variável aleatória *r-dimensional* com  $E|X_j|^r < \infty, j = 1, \dots, r$ , onde  $X_j$  são reais ou complexas. O *cumulante conjunto de ordem r* é definido por:

$$Cum(X_1, \dots, X_r) = \sum_v (-1)^{p-1} (p-1)! (E \prod_{j \in v_1} X_j) \dots (E \prod_{j \in v_p} X_j), \quad (2.8)$$

em que a soma é sobre todas as partições  $v = (v_1, \dots, v_p)$  dos inteiros  $(1, \dots, r)$ .

(b) Seja uma série temporal  $\{X(t), t = 0, \pm 1, \dots\}$  satisfazendo  $E|X(t)|^k < \infty$ ,

então

$$C_x(t_1, \dots, t_r) = Cum(X_{t_1}, \dots, X_{t_r}) \quad (2.9)$$

é denominada *função cumulante conjunta* de ordem r da série  $X(t)$ .

**Resultado:** O  $Cum(X_{t_1}, \dots, X_{t_r})$  é dado pelo coeficiente de  $i^r t_1 \dots t_r$ , na série de expansão de Taylor de  $(\log (E \exp(i \sum_{j=1}^r X_j t_j)))$ .

**Propriedades:**

(a)  $Cum(aX_1, \dots, aX_r) = a_1, \dots, a_r Cum(X_1, \dots, X_r)$ , para  $a_1, \dots, a_r$  constantes.

(b)  $Cum(X_1, \dots, X_r)$  é simétrica em seus argumentos.

(c)  $Cum(X_j) = E(X_j)$ , para  $j = 1, \dots, r$ .

(d)  $Cum(X_j, X_j) = Var(X_j)$  e  $Cum(X_j, X_k) = Cov(X_j, X_k)$ , para  $j, k = 1, \dots, r$ .

(e) Se algum subconjunto dos  $(X_1, \dots, X_r)$  é independente dos demais, então  $Cum(X_1, \dots, X_r) = 0$ .

(f) Para variável aleatória  $(Z_1, X_1, \dots, X_r)$ .

$Cum(X_1 + Z_1, X_2, \dots, X_r) = Cum(X_1, \dots, X_r) + Cum(Z_1, X_2, \dots, X_r)$ .

(g) Para  $u$  constante e  $r = 2, 3, \dots$ ,  $Cum(X_1 + u, X_2, \dots, X_r) = Cum(X_1, X_2, \dots, X_r)$ .

(h) Se variável aleatória  $(X_1, \dots, X_r)$  e  $(Z_1, \dots, Z_r)$  são independentes, então

$Cum(X_1 + Z_1, \dots, X_r + Z_r) = Cum(X_1, \dots, X_r) + Cum(Z_1, \dots, Z_r)$ .

Para mais detalhes, ver Brillinger (1981) e Brockwell e Davis (1996).

**Definição 2.10:** Suponha que a série temporal  $X(t)$ ,  $t = 0, \pm 1, \dots$ , com função de autocovariância  $Cov(X(t+u), X(t)) = \gamma(u)$ ,  $t, u = 0, \pm 1, \dots$  satisfazendo

$$\sum_{u=-\infty}^{\infty} |\gamma(u)| < \infty, \quad (2.10)$$

então o espectro de  $X(t)$ , na frequência  $\lambda$ , é dado por

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{u=-\infty}^{\infty} \exp(-i\lambda u) \gamma(u), \quad (2.11)$$

para  $-\infty < \lambda < \infty$ .

Como na análise de Fourier, a característica fundamental é o espectro, que é a transformada de Fourier da função de autocovariância. Portanto, sob o ponto de vista da quantidade de informação probabilística que fornecem o espectro e a função de autocovariância são ferramentas equivalentes.

Demonstra-se que o espectro  $f(\lambda)$  definido por (2.11) é real, limitado, não negativo e uniformemente contínuo. Além disso,  $f(\lambda)$  é par e simétrica, ou seja,  $f(\lambda) = f(-\lambda)$ , e periódico de período  $2\pi$ ,  $f(\lambda) = f(\lambda + 2\pi)$ .

Como  $f(\lambda)$  é par e periódica de período  $2\pi$ , basta tomar  $\lambda \in [-\pi, \pi]$  e utilizar o intervalo  $[0, \pi]$  como o domínio fundamental da definição do espectro  $f(\lambda)$ .

A relação (2.11) pode ser invertida e a função de autocovariância  $\gamma(u)$  pode ser escrita como:

$$\gamma(u) = \int_{-\pi}^{\pi} \exp(i\alpha u) f(\alpha) d\alpha, \quad (2.12)$$

para  $u = 0, \pm 1, \dots$ . No caso particular  $u = 0$ , temos:

$$\gamma(0) = \text{Var}(X(t)) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha) d\alpha. \quad (2.13)$$

**Definição 2.11:** (a) Dizemos que a distribuição de um vetor aleatório  $r$ -dimensional  $X = (X_1, \dots, X_r)'$  é normal multivariada de dimensão  $r$ , com média  $\mu_X = (\mu_1, \dots, \mu_r)'$  e matriz de covariância  $\Sigma_X$ , se sua função de densidade (f.d.p) é:

$$f(x_1, \dots, x_r) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{r}{2}} |\Sigma_X|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}(X - \mu_X)^t \Sigma_X^{-1} (X - \mu_X)\right). \quad (2.14)$$

**Notação:**  $X \sim N_r(\mu_X, \Sigma_X)$ .

(b) Se  $X$  é um vetor  $r$ -dimensional, com componentes complexas, dizemos que  $X$  tem distribuição normal multivariada complexa de dimensão  $r$ , com média  $\mu_X$  e matriz de covariâncias  $\Sigma_X$ , se o vetor

$$\begin{bmatrix} ReX \\ ImX \end{bmatrix} \sim N_{2r} \left( \begin{bmatrix} ReX \\ ImX \end{bmatrix}; 1/2 \begin{bmatrix} ReX & -Im\Sigma_X \\ Im\Sigma_X & Re\Sigma_X \end{bmatrix} \right),$$

em que  $\Sigma_X$  é uma matriz Hermitiana não negativa definida de dimensão  $r \times r$ .

**Notação:**  $X \sim X_r^c \sim N_r(\mu_X, \Sigma_X)$ , com

$$E(X) = \mu_X \quad (2.15)$$

$$E((X - \mu_X)(\overline{X - \mu_X})') = \Sigma_X \quad (2.16)$$

e

$$E((X - \mu_X)(X - \mu_X)') = 0 \quad (2.17)$$

Se  $\Sigma_X$  é não-singular, então a função densidade de  $X$  é dada por:

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= \pi^{-1} (|\Sigma_{XX}|)^{-1} \exp \left( -\overline{(X - \mu_X)'} \Sigma_{XX}^{-1} (X - \mu_X) \right) \\ &\quad * \prod_j (dReX_j)(dImX_j), \end{aligned} \quad (2.18)$$

para  $-\infty < ReX_j, ImX_j < \infty$ .

**Propriedades:**

(a) Se  $\Sigma_{XX}$  é uma matriz diagonal, então as componentes de  $X$  são estatisticamente independentes.

(b) No caso que  $r = 1$ , se  $X \sim N_1^c(\mu_X, \sigma_X)$ ,  $\sigma_X \in R$ , então  $ReX$  e  $ImX$  são independentes e com distribuições  $N_1\left(Re\mu_X, \frac{\sigma_X}{2}\right)$  e  $N_1\left(Im\mu_X, \frac{\sigma_X}{2}\right)$  respectivamente.

**Definição 2.12:** (a) Dizemos que a sequência vetorial  $\zeta_T$  de dimensão  $r$ ,  $T=1,2,\dots$ , é assintoticamente  $N_r(\mu_T, \sigma_T)$  se a sequência  $\Sigma_T^{-\frac{1}{2}}(\zeta_T - \mu_T)$  converge em distribuição a  $N_r(0, I)$ .

(b) Dizemos que a sequência vetorial  $\zeta_T$  de dimensão  $r$ ,  $T=1,2,\dots$ , é assintoticamente  $N_r^c(\mu_T, \sigma_T)$  se a sequência  $\Sigma_T^{-\frac{1}{2}}(\zeta_T - \mu_T)$  converge em distribuição a  $N_r^c(0, I)$ .

**Definição 2.13:** (a) A matriz de dimensão  $r \times r$  das variáveis aleatórias

$$W = \sum_{j=1}^n X_j X_j' \quad (2.19)$$

tem uma distribuição *Wishart* de dimensão  $r$  e grau de liberdade  $n$  se  $X_1, X_2, \dots, X_n$  são independentes com distribuição normal  $N_r(0, \Sigma_{XX})$ .

**Notação:**  $W: W_r(n, \Sigma_{XX})$ .

(b) A matriz de dimensão  $r \times r$  das variáveis aleatórias

$$W = \sum_{j=1}^n X_j \bar{X}_j' \quad (2.20)$$

tem uma distribuição *Wishart* complexa de dimensão  $r$  e grau de liberdade  $n$  se  $X_1, X_2, \dots, X_n$  são independentes com distribuição normal  $N_r^c(0, \Sigma_{XX})$ .

**Notação:**  $W: W_r^c(n, \Sigma_{XX})$ .

**Propriedades:**

(a)  $\bar{W} = W'$ .

(b)  $E(W) = n\Sigma_{XX}$ .

$$(c) \text{Cov}(W_{jk}, W_{lm}) = E((W_{jk} - n\Sigma_{jk})(\overline{W_{lm} - n\Sigma_{lm}})) = n\Sigma_{jl}\overline{\Sigma_{km}}$$

(d) Se  $W \sim W_r^c(n, \Sigma)$ , então  $W_{jj}$  tem distribuição  $\Sigma_{jj}\chi_{2n}^2/2$ .

(e) Se  $Y \sim N_n^c(\mu, \sigma^2 I)$  e

$$\overline{Y}'Y = \overline{Y}'A_1Y + \dots + \overline{Y}'A_KY,$$

em que  $A_k$  Hermitiana de posto  $n_k, k = 1, \dots, K$ , então  $\overline{Y}'A_1Y \dots \overline{Y}'A_KY$  são independentes e  $\overline{Y}'A_KY$  tem distribuição (qui-quadrado não central)

$$\sigma^2\chi_{2n_k}^2\left(\frac{\overline{\mu}'\mu}{\sigma^2}\right)/2,$$

se e somente se,  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ .

## 2.2 Transformada Finita de Fourier e Periodograma

Nesta seção, introduzimos a análise de Fourier que é um método utilizado para decompor um conjunto de dados em componentes periódicas, independentemente de ele ser periódico ou não.

**Definição 2.14:** (a) Seja  $X(n), n = 0, \pm 1, \dots$ , um processo estacionário real. A transformada finita de Fourier dos valores  $X(0), X(1), \dots, X(T-1)$  de  $X(n)$  é dada por

$$d_x^{(T)}(\lambda) = \sum_{t=0}^{T-1} X(t) \exp(-i\lambda t), -\infty < \lambda < \infty. \quad (2.21)$$

No caso que  $T = 2n + 1, n$  inteiro, podemos escrever

$$d_x^{(T)}(\lambda) = \exp(-i\lambda n) \sum_{u=-n}^n X(u+n) \exp(-i\lambda u). \quad (2.22)$$

Se, em particular,  $\lambda$  assume os valores discretos  $\lambda = \frac{2\pi s}{T}, s = 0, \dots, T-1$ , então os valores

$$d_x^{(T)}\left(\frac{2\pi s}{T}\right), s = 0, \dots, T-1 \quad (2.23)$$

constituem a *transformada discreta de Fourier* de  $X(t), t = 0, \dots, T-1$ . As frequências  $\frac{2\pi s}{T}$  são denominadas *frequências discretas de Fourier*.

**Propriedades:**

(a)  $d_x^{(T)}(\lambda + 2\pi) = d_x^{(T)}(\lambda)$ .

(b)  $\overline{d_x^{(T)}(\lambda)} = d_x^{(T)}(-\lambda)$ , se  $X(t)$  é real.

(c)  $d_{\alpha x + \beta y}^{(T)}(\lambda) = \alpha d_x^{(T)}(\lambda) + \beta d_y^{(T)}(\lambda)$ ,  $\alpha, \beta$  são escalares, e  $X(t), Y(t)$  são processos estacionários não correlacionados.

A relação (2.21) pode ser invertida e a série  $X(t)$  pode ser escrita como

$$X(t) = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \exp(-i\lambda t) d_x^{(T)}(\lambda) d\lambda, t = 0, \pm 1, \dots, T-1,$$

ou

$$X(t) = T^{-1} \sum_{s=0}^{T-1} \exp\left(i \frac{2\pi s t}{T}\right) d_x^{(T)}\left(\frac{2\pi s t}{T}\right), t = 0, \dots, T-1.$$

**Teorema 2.1:** Se  $X(t) = (X_1(t), \dots, X_r(t))'$  é estritamente estacionário,

$$\sum_{\mu_1, \dots, \mu_{k-1}}^{\infty} |C_x(\mu_1, \dots, \mu_{k-1})| < \infty \quad (2.24)$$

e  $s_j(T)$  um inteiro com  $\lambda_j = \frac{2\pi s_j(T)}{T} \rightarrow \lambda_j$  quando  $T \rightarrow \infty, j = 1, \dots, J$ , então:

- (a) para  $2\lambda_j(T), \lambda_j(T) \pm \lambda_k(T) \not\equiv 0 \pmod{2\pi}, 1 \leq j \leq k \leq J, T = 1, 2, \dots$ , temos que  $d_x^{(T)}(\lambda_j(T))$  converge em distribuição  $N_r(0, 2\pi T f_{xx}(\lambda_j))$  independentes;

(b) para  $\lambda = 0, \pm 2\pi, \dots, d_x^{(T)}(\lambda)$  converge em distribuição  $N_r(T\mu_x, 2\pi T f_{xx}(\lambda))$  independentes e

(c) para  $\lambda = \pm\pi, \pm 3\pi, \dots, d_x^{(T)}(\lambda)$  converge em distribuição  $N_r(0, 2\pi T f_{xx}(\lambda))$  independentes.

O *periodograma* de uma série temporal estacionária  $X(t), t = 0, \dots, T - 1$  é dado por

$$I_{xx}^{(T)}(\lambda) = (2\pi T)^{-1} \left| d_x^{(T)}(\lambda) \right|^2. \quad (2.25)$$

Segundo o Teorema 2.1, temos que

$$d_x^{(T)}(\lambda) \text{ converge em distribuição } \begin{cases} N_1^c(0, 2\pi T f_{xx}(\lambda)) & \text{se } \lambda \not\equiv 0 \pmod{\pi} \\ N_1(T\mu_x, 2\pi T f_{xx}(\lambda)) & \text{se } \lambda = 0, \pm 2\pi, \dots \\ N_1(0, 2\pi T f_{xx}(\lambda)) & \text{se } \lambda = \pm\pi, \pm 3\pi, \dots \end{cases}$$

Sugerindo que  $I_{xx}^{(T)}(\lambda)$  é um possível estimador para  $f_{xx}(\lambda)$ . Notamos que  $I_{xx}^{(T)}(\lambda)$  tem mesmas propriedades do espectro  $f_{xx}(\lambda)$ .

Segundo o Brillinger (1981), o *periodograma* é um estimador assintoticamente não viciado, não correlacionado, porém não consistente.

**Teorema 2.2:** Se  $X(t)$  é estritamente estacionário satisfazendo (2.24) e  $s_j(T)$

um inteiro com  $\lambda_j = \frac{2\pi s_j(T)}{T} \rightarrow \lambda_j$  quando  $T \rightarrow \infty, j = 1, \dots, J$ , então:

(a) para  $2\lambda_j(T), \lambda_j(T) \pm \lambda_k(T) \not\equiv 0 \pmod{2\pi}, 1 \leq j \leq k \leq J, T = 1, 2, \dots$ , temos que  $I_{xx}^{(T)}(\lambda_j(T))$  converge em distribuição  $f_{xx}\chi_2^2/2$  independentes;

(b) para  $\lambda = \pm\pi, \pm 3\pi, \dots, I_{xx}^{(T)}(\lambda)$  converge em distribuição  $f_{xx}\chi_1^2$  independentes e

(c) para  $\lambda \equiv 0 \pmod{2\pi}$ ,  $I_{xx}^{(T)}(\lambda)$  converge em distribuição  

$$\begin{cases} f_{xx}(\lambda)\chi_1^2 & \text{se } \mu_x \neq 0 \\ f_{xx}(\lambda)\chi_1^2 & \text{se } \mu_x = 0, \end{cases}$$
 onde  $\psi = |\mu_x|\sqrt{T/(2\pi f_{xx}(\lambda))}$  é o parâmetro de não-centralidade do qui-quadrado.

Como devido a grande instabilidade do *periodograma* (estimador não consistente do espectro), o Teorema 2.2 sugere construir estimadores espectrais que têm propriedades melhores que o *periodograma*.

De acordo com o Teorema 2.2, se  $s(T)$ , inteiro com  $\frac{2\pi s(T)}{T} \rightarrow \lambda$  e  $2[s(T) + j] \not\equiv 0 \pmod{T}$ , então  $I_{xx}^{(T)}\left(\frac{2\pi[s(T)+j]}{T}\right)$ ,  $j = 0, \pm 1, \dots, \pm m$ , são aproximadamente independentes com distribuição assintótica  $f_{xx}(\lambda)\chi_2^2/2$ . Assim, um novo estimador para  $f_{xx}(\lambda)$  é denominado *periodograma suavizado*, é dado por:

$$f_{xx}^{(T)}(\lambda) = \begin{cases} (2m+1)^{-1} \sum_{-m}^m I_{xx}^{(T)}(\lambda) \left(\frac{2\pi[s(T)+j]}{T}\right) & \text{se } \lambda \not\equiv 0 \pmod{\pi} \\ (2m)^{-1} \left( \sum_{j=-m}^{-1} I_{xx}^{(T)}\left(\lambda + \frac{2\pi j}{T}\right) + \sum_{j=1}^m I_{xx}^{(T)}\left(\lambda + \frac{2\pi j}{T}\right) \right) & \text{se } \lambda = 0 \pmod{2\pi} \text{ ou } \lambda = \pm\pi, \pm 3\pi, \dots \text{ e } T \text{ é par} \\ m^{-1} \sum_{j=1}^m I_{xx}^{(T)}\left(\lambda - \frac{\pi}{T} + \frac{2\pi j}{T}\right) & \text{se } \lambda = \pm\pi, \pm 3\pi, \dots \text{ e } T \text{ é ímpar} \end{cases} \quad (2.26)$$

que é uma média das ordenadas do periodograma em torno de  $\lambda$ .

Segundo o Brillinger (1981), o periodograma suavizado é um estimador espectral assintoticamente consistente, não viesado e não correlacionado.

**Teorema 2.3:** Seja  $s(T)$  um inteiro com  $\frac{2\pi s(T)}{T} \rightarrow \lambda$  quando  $T \rightarrow \infty$ ,  $\lambda_j \pm \lambda_k \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$  para  $1 \leq j \leq k \leq J$ , então:

(a) Para  $j = 1, \dots, J$ ,  $f_{xx}^{(T)}(\lambda_j)$  converge em distribuição

$f_{xx}^{(T)}(\lambda_j)\chi_{4m+2}^2/(4m+2)$  independentes se  $\lambda_j \not\equiv 0 \pmod{\pi}$  e

(b) Para  $j = 1, \dots, J$ ,  $f_{xx}^{(T)}(\lambda_j)$  converge em distribuição

$$f_{xx}^{(T)}(\lambda_j) \chi_{2m}^2 / (2m) \text{ independentes se } \lambda_j \equiv 0 \pmod{\pi}$$

Para mais detalhes, ver Brillinger (1981), Bloomfield (2000).

### 3. Análise de Variância Usando a Transformada de Fourier

Analisaremos as variações apresentadas nos dados cujas medidas respostas são séries temporais. As análises propostas podem ser vistas como extensões de procedimentos usados na ANOVA (Analysis of Variance), quando cada ocorrência (ou série) de um planejamento conduz a um variável real. Nosso objetivo consiste na aplicação complexa de ANOVA aos componentes das transformadas discretas de Fourier das séries observadas (retornos de ações). Serão considerados efeitos fixos.

#### 3.1 Forma Geral

Uma abordagem comum de análise de variância é feita através de um modelo de regressão linear com a seguinte forma (ver Roy et al, 1971)

$$Y = Z\Theta X + \varepsilon, \quad (4.1)$$

- $Y$ : é uma matriz de dimensão  $N \times T$  das respostas observadas, onde  $N$  linhas correspondem aos indivíduos do experimento e  $T$  ao número de respostas de cada indivíduo.
- $Z$ : é uma matriz de planejamento entre os indivíduos, de dimensão  $N \times M$ .
- $X$ : é uma matriz de planejamento dentro dos indivíduos, de dimensão  $S \times T$ .
- $\Theta$ : é uma matriz de coeficientes não observados (parâmetros), de dimensão  $M \times S$ .
- $\varepsilon$ : é uma matriz de erros aleatórios, de dimensão  $N \times T$ .

Em geral, a matriz  $Z$  é construída com os zero e um, e  $Z$  e  $X$  são consideradas na maioria das vezes como fixas. A matriz  $\Theta$  é fixa no modelo de efeitos fixos e estocástica no modelo de efeitos aleatórios.

O modelo (3.1) pode ser reescrito na seguinte forma:

$$Y_n(t) = \sum_{j=1}^S \sum_{i=1}^M Z_{ni} \Theta_{ij} X_j(t) + \varepsilon_n(t), \quad (3.2)$$

em que  $Y_n(t)$  representa o elemento na  $n$ -ésima linha e  $t$ -ésima coluna da matriz  $Y$ .

Neste trabalho, estudaremos o caso em que  $Y_n(t)$ ,  $t = 0, \dots, T - 1$ , são  $N$  séries temporais.

Para aplicarmos a técnica de análise de variância, quando temos como medidas respostas um conjunto de  $N$  séries temporais estacionárias,  $\{X_n(t), t = 0, \dots, T - 1$  e  $n = 1, \dots, N$ , precisamos primeiro eliminar a dependência entre as observações de cada série, e a transformada discreta de Fourier será aplicada por essa finalidade. Seja:

$$d_{x_n}^{(T)}(k) = \sum_{t=0}^{T-1} X_n(t) \exp\left(-i \frac{2\pi kt}{T}\right), \quad (3.3)$$

para  $k = 0, 1, \dots, \frac{[T-1]}{2}$ .

Segundo o Teorema 2.1, para  $k = 1, \dots, K$ ,  $K \ll T$ ,  $\frac{2\pi k}{T} \simeq \lambda$  e  $\frac{2\pi k}{T} \neq 0, \pm\pi, \dots$ , (3.3) converge em distribuição para

$$N^c(0, 2\pi T f_{x_n x_n}(\lambda)), \quad (3.4)$$

Independentes, em que  $f_{x_n x_n}(\lambda)$  é o espectro da série  $X_n(t)$ . Portanto,

$$X'_n(k) = (2\pi T)^{-\frac{1}{2}} d_{x_n}^{(T)}(k) \quad (3.5)$$

têm as seguintes representações

$$X'_n(k) = \xi_{nk} + O_{a.s.}(1), \quad (3.6)$$

para todo  $n$ , em que  $\xi_{n1}, \dots, \xi_{nK}$  são variáveis  $N^c(0, f_{x_n x_n}(\lambda))$  independentes e  $O_{a.s.}(1) \rightarrow 0$  quase certamente quando  $T \rightarrow \infty$ .

Pela seção 2, lembramos que um estimador padronizado de  $f_{x_n x_n}(\lambda)$ , denominado *periodograma suavizado*, é dado por:

$$f_{x_n x_n}^{(T)}(\lambda) = K^{-1} \sum_{k=1}^K |X'_n(k)|^2. \quad (3.7)$$

Segundo o Teorema 2.3, (3.7) tem a representação seguinte:

$$f_{x_n x_n}^{(T)}(\lambda) = \frac{f_{x_n x_n}(\lambda) \chi_{2K}^2}{2K} + O_{a.s.}(1) \quad (3.8)$$

para todo  $n$ .

Mais informações podem ser consultadas no Hannan (1970) e Brillinger (1981).

Alguns casos particulares do modelo (3.2) serão apresentados nas seções seguintes.

### 3.2 Modelo com Um Sinal Comum Determinístico

Um caso importante especial da família ANOVA é detectar um sinal comum,  $\Omega(t)$ , possivelmente oculto pelo erro, em uma coleção de  $\mathbf{N}$  séries temporais. Neste caso, podemos usar o modelo:

$$Y_n(t) = \mu_n + \Omega(t) + \varepsilon_n(t), \quad (3.9)$$

para  $n = 1, \dots, N, t = 0, 1, \dots, T - 1$ .

Suponhamos que queremos detectar um comportamento padrão para o valor de retorno dos ativos de cada setor portfólio. Seja  $Y_n(t), n = 1, \dots, N, t = 0, 1, \dots, T-1$ , o valor de retorno do  $n$ -ésimo ativo no instante  $t$  de um determinado portfólio. Dessa forma, podemos modelar os dados pelo modelo (3.9), em que:

$\mu_n$  é a média do valor de retorno da  $n$ -ésimo ativo e é constante.

$\Omega(t)$  representa o sinal comum a todos os retornos e é determinístico.

$\varepsilon_n(\cdot)$  são erros (séries estacionárias) do modelo, independentes com média zero e função de covariância  $c_{\varepsilon\varepsilon}(u)$  e espectro  $f_{\varepsilon\varepsilon}(\lambda)$ .

Segundo as suposições do modelo, temos:

$$EY(t) = \mu_n + \Omega(t)$$

e

$$Cov(Y_n(t+u), Y_n(t)) = c_{\varepsilon\varepsilon}(u).$$

Testar a existência de um sinal comum é equivalente a testar a hipótese

$$H_{01}: \Omega(t) = 0, \quad (3.10)$$

que no nosso exemplo significa verificar se existe um sinal comum a todos os retornos dentro de um determinado portfólio.

Pela definição (3.5) e a representação (3.6), podemos reescrever o modelo (3.9) na seguinte forma:

$$Y_n'(k) = \Omega'(k) + \xi_{nk} + U_{a.s.}(1), \quad (3.11)$$

para  $k = 0, \dots, \frac{[T-1]}{2}$ , com variáveis  $\xi_{nk} \sim N^c(0, f_{\varepsilon\varepsilon}(\lambda))$  independentes.

Para fazer o teste (3.10), consideramos as seguintes somas de quadrados:

$$SQH_{01}(\lambda) = N \sum_{k=1}^K |Y'(k)|^2 \quad (3.12)$$

e

$$SQR_{01}(\lambda) = \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^K |Y'_n(k) - Y'(k)|^2, \quad (3.13)$$

em que

$$Y'(k) = N^{-1} \sum_{n=1}^N Y'_n(k). \quad (3.14)$$

Utilizando a expressão (3.11) e a extensão complexa do teorema de Fisher-Cochran dado na seção 2 (ver a propriedade (e) da definição 2.13 (b)), (3.12) e (3.13) convergem quase certamente para

$$f_{\varepsilon\varepsilon}(\lambda) \chi_{2K}^2 \left( \frac{N \sum_k |\Omega'(k)|^2}{f_{\varepsilon\varepsilon}(\lambda)} \right) / 2 \quad (3.15)$$

e

$$f_{\varepsilon\varepsilon}(\lambda) \chi_{2K(N-1)}^2 / 2, \quad (3.16)$$

respectivamente, com  $\chi_v^2$  independentes.

Calculamos os valores esperados de (3.12) e (3.13), temos

$$\begin{aligned} E(SQH_{01}(\lambda)) &= E\left\{N \sum_{k=1}^K |\Omega'(k) + \xi_{.k}|^2\right\} \\ &= E\left\{N \sum_{k=1}^K |\Omega'(k)|^2 + NK \frac{f_{\varepsilon\varepsilon}(\lambda)}{N}\right\} \\ &= N \sum_{k=1}^K |\Omega'(k)|^2 + K f_{\varepsilon\varepsilon}(\lambda) \\ &= NK f_{\Omega\Omega}^{(T)}(\lambda) + K f_{\varepsilon\varepsilon}(\lambda), \end{aligned}$$

em que  $\xi_{.k} = \sum_{n=1}^N \frac{\xi_{nk}}{N}$  e

$$\begin{aligned}
E(SQR_{01}(\lambda)) &= E\left\{\sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^K |\xi_{nk} - \xi_{.k}|^2\right\} \\
&= E\left\{\sum_{k=1}^K K(f_{\varepsilon\varepsilon}(\lambda) + \frac{f_{\varepsilon\varepsilon}(\lambda)}{N})\right\} \\
&= \sum_{n=1}^N KE\left\{\frac{N-1}{N} f_{\varepsilon\varepsilon}(\lambda)\right\} \\
&= K(N-1) f_{\varepsilon\varepsilon}(\lambda).
\end{aligned}$$

A estatística do teste (3.10) é dada por:

$$F_{01}(\lambda) = \frac{2SQH_{01}(\lambda)/2K}{2SQR_{01}(\lambda)/2K(N-1)} \quad (3.17)$$

que tem uma distribuição F com parâmetro de não centralidade  $\frac{N \sum_k |\Omega'(k)|^2}{f_{\varepsilon\varepsilon}(\lambda)}$ .

Sob  $H_{01}$ , (3.17) tem uma distribuição  $F(2K, 2K(N-1))$  para  $0 \leq \lambda \leq \pi$ . Mais detalhes, ver Brillinger (1980). Resumimos os resultados obtidos nas seguintes tabelas: ANOVAF (Análise de Variância usando Fourier).

<i>Fonte</i>	<i>Soma de quadrados</i> ( <i>SQ</i> )	<i>Grau de liberdade</i> ( <i>gl</i> )
$\Omega(t)$	$N \sum_k  Y'(k) ^2$	$2K$
<i>Resíduo</i>	$\sum_k \sum_1^N  Y'_n(k) - Y'(k) ^2$	$2K(N-1)$
<i>Total</i>	$\sum_k \sum_1^N  Y'_n(k) ^2$	$2KN$

Tabela 3.1: ANOVAF soma de quadrado para o teste (3.10) na frequência  $\lambda$ .

<i>Fonte</i>	<i>Quadrado médio</i> = $2SQ/gl$ ( <i>QM</i> )	<i>Estatística</i> <i>F</i>	<i>Quadrado médio esperado</i> ( <i>EQM</i> )
$\Omega(t)$	$\frac{N \sum_k  Y'(k) ^2}{K}$ (1)	(1)/(2)	$f_{\varepsilon\varepsilon}(\lambda) + N f_{\Omega\Omega}^{(T)}(\lambda)$
<i>Resíduo</i>	$\frac{\sum_k \sum_1^N  Y'_n(k) - Y'(k) ^2}{K(N-1)}$ (2)		$f_{\varepsilon\varepsilon}(\lambda)$
<i>Total</i>			

Tabela 3.2: ANOVAF quadrado médio para o teste (3.10) na frequência  $\lambda$ .

A estatística do teste (3.10) usando os componentes espectrais não suavizados na frequência  $\lambda_k = \frac{2\pi k}{T}$ ,  $k = 0, 1, \dots, \frac{[T-1]}{2}$  é:

$$F_{01} = \frac{N|Y'(k)|^2}{\sum_{n=1}^N |Y'_n(k) - Y'(k)|^2 / (N-1)}. \quad (3.18)$$

De acordo com Shumway (2006), tal estatística tem uma distribuição  $F$ , com parâmetro de não centralidade  $\frac{N|\Omega'(k)|^2}{f_{\varepsilon\varepsilon}(\lambda_k)}$  e que sob  $H_{01}$ , tem uma distribuição  $F(2, 2(N-1))$ .

Se quisermos testar várias frequências conjuntamente, podemos aplicar a analogia feita em análise multivariada utilizando uma das seguintes estatísticas globais

$$\sup_{q=1}^{Q/2} F(2\pi q/Q), \quad (3.19)$$

$$\sum_{q=1}^{Q/2} F(2\pi q/Q) \quad (3.20)$$

e

$$\prod_{q=1}^{Q/2} [1 + (N-1)F(2\pi q/Q)] \quad (3.21)$$

para alguma  $Q$  (número de frequências testadas), onde  $F(\lambda)$  denota a estatística  $F$  da Tabela 3.2. Ver Roy et al (1971).

A estatística  $Y'(k)$  é um estimador de  $\Omega'(k)$  com média e variância dadas por:

$$E(Y'(k)) = \Omega'(k)$$

e

$$\text{Var}(Y'(k)) = f_{\varepsilon\varepsilon}(2\pi k/T).$$

Assim, o sinal  $\Omega(t)$  pode ser estimado por  $Y(t) = \frac{\sum_N Y_n(t)}{N}$  com as propriedades abaixo:

$$E(Y(t)) = \mu + \Omega(t)$$

e

$$Var(Y(t)) = c_{\varepsilon\varepsilon}(0)/N.$$

### 3.3 Modelo com Um Fator Fixo

Se realizarmos um experimento com  $M$  tratamentos, e os resultados são séries temporais estacionárias. Um modelo apropriado para este caso é:

$$Y_{lm}(t) = \mu_{lm} + \Omega(t) + \Gamma_m(t) + \varepsilon_{lm}(t), \quad (3.22)$$

para  $l = 1, \dots, L_m, m = 1, \dots, M, N = L_1 + \dots + L_M, t = 0, 1, \dots, T - 1$ , em que

- $L_m$ : número de séries submetidas ao m-ésimo tratamento.
- $\Gamma_m$ : efeito do m-ésimo tratamento.
- $\Omega(t)$ : sinal comum entre  $N$  séries temporais.

Exemplificamos esse tipo de modelo supondo que estamos interessados em verificar se existe diferença de comportamento dos retornos dos ativos entre diferentes portfólios, como de alimentação, bancário, metalúrgico, etc. Consideremos  $Y_{lm}(t)$ , o valor de retorno do l-ésimo ativo no m-ésimo portfólio, e podemos modelar os dados pelo modelo (3.22), temos

- $\mu_{lm}$ : é a média do valor de retorno do l-ésimo ativo no m-ésimo portfólio e é constante.
- $\Omega(t)$ : o sinal comum entre todos os retornos e é determinístico.
- $\Gamma_m$ : efeito fixo do m-ésimo portfólio com restrição

$$\sum_{m=1}^M L_m \Gamma_m(t) = 0.$$

(3.23)

- $\varepsilon_{lm}(\cdot)$ : são erros (séries estacionárias), independentes, com média zero, função de covariância  $c_{\varepsilon\varepsilon}(u)$  e espectro  $f_{\varepsilon\varepsilon}(\lambda)$ .

Para este modelo, temos

$$\begin{aligned} EY_{lm}(t) &= \mu_{lm} + \Omega(t) + \Gamma_m(t), \\ Cov(Y_{lm}(t+u), Y_{lm}(t)) &= c_{\varepsilon\varepsilon}(u) \end{aligned}$$

e

$$Cov((Y_{lm}(t+u), Y_{l'm'}(t))) = 0, \quad (l'm') \neq (l, m).$$

Nosso problema é detectar se existe diferença entre os efeitos dos tratamentos (portfólios), para isso, testaremos

$$H_{02}: \Gamma_1(t) = \Gamma_2(t) = \dots = \Gamma_M(t) = 0, \quad (3.24)$$

para todo  $t$ . Verificar a existência de similaridade entre todos os retornos, ou seja, testarmos

$$H_{03}: \Omega(t) = 0. \quad (3.25)$$

Se  $k$  é um inteiro com  $\frac{2\pi k}{T} \simeq \lambda \neq 0$ , o modelo (3.22) pode ser escrito em termos de transformada discreta de Fourier

$$\begin{aligned} Y'_{lm}(k) &= \Omega'(k) + \Gamma'_m(k) + \varepsilon'_{lm}(k) \\ &= \Omega'(k) + \Gamma'_m(k) + \xi_{lmk} + O_{a.s.}(1), \end{aligned} \quad (3.26)$$

para  $l = 1, \dots, L_m, m = 1, \dots, M, k = 1, \dots, K$  com  $\xi_{lmk} \sim N^c(0, f_{\varepsilon\varepsilon}(\lambda))$  independentes.

Para a análise, temos as seguintes somas de quadrados:

$$SQH_{03}(\lambda) = N \sum_k |Y'_{..}(k)|^2, \quad (3.27)$$

$$SQH_{02}(\lambda) = \sum_k \sum_m L_m |Y'_{.m}(k) - Y'_{..}(k)|^2, \quad (3.28)$$

e

$$SQR_{02}(\lambda) = \sum_k \sum_m \sum_l |Y'_{lm}(k) - Y'_{.m}(k)|^2, \quad (3.29)$$

em que

$$Y'_{.m}(k) = L_m^{-1} \sum_l Y'_{lm}(k) \quad (3.30)$$

e

$$Y'_{..}(k) = N^{-1} \sum_m \sum_l Y'_{lm}(k) = N^{-1} \sum_m L_m Y'_{.m}(k). \quad (3.31)$$

Usando a expressão (3.26) e a extensão do teorema de Fisher-Cochran (ver seção 2), as equações (3.27), (3.28) e (3.29) convergem quase certamente para

$$f_{\varepsilon\varepsilon}(\lambda) \chi_{2K}^2 \left( \frac{N \sum_k |\Omega'(k)|^2}{f_{\varepsilon\varepsilon}(\lambda)} \right) / 2, \quad (3.32)$$

$$f_{\varepsilon\varepsilon}(\lambda) \chi_{2K(M-1)}^2 \left( \frac{\sum_k \sum_m L_m |\Gamma'_m(k)|^2}{f_{\varepsilon\varepsilon}(\lambda)} \right) / 2 \quad (3.33)$$

e

$$f_{\varepsilon\varepsilon}(\lambda) \chi_{2K(N-M)}^2 / 2, \quad (3.34)$$

respectivamente, com  $\chi_v^2$  independentes.

Os resultados estão resumidos nas tabelas abaixo:

<i>Fonte</i>	<i>Soma de quadrados</i> (SQ)	<i>Grau de liberdade</i> (gl)
$\Omega(t)$	$N \sum_k  Y'_{..}(k) ^2$	2K
$\Gamma_m(t)$	$\sum_k \sum_{m=1}^M L_m  Y'_{.m}(k) - Y'_{..}(k) ^2$	2K(M - 1)
<b>Resíduo</b>	$\sum_k \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^{L_m}  Y'_{lm}(k) - Y'_{.m}(k) ^2$	2K(N - M)
<b>Total</b>	$\sum_k \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^{L_m}  Y'_{lm}(k) ^2$	2KN

Tabela 3.3: ANOVAF soma de quadrado para os testes (3.24) e (3.25) na frequência  $\lambda$ .

<i>Fonte</i>	<i>Quadrado médio = 2SQ/gl</i> ( <i>QM</i> )	<i>Estatística</i> <i>F</i>	<i>Quadrado médio</i> <i>esperado (EQM)</i>
$\Omega(t)$	$\frac{N \sum_k  Y'_{..}(k) ^2}{K} \quad (1)$	(1)/(3)	$f_{\varepsilon\varepsilon}(\lambda) + N f_{\Omega\Omega}^{(T)}(\lambda)$
$\Gamma_m(t)$	$\frac{\sum_k \sum_{m=1}^M L_m  Y'_{m.}(k) - Y'_{..}(k) ^2}{K(M-1)} \quad (2)$	(2)/(3)	$f_{\varepsilon\varepsilon}(\lambda) + \frac{\sum_{m=1}^M L_m f_{\Gamma_m\Gamma_m}'(\lambda)}{M-1}$
<i>Resíduo</i>	$\frac{\sum_k \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^{L_m}  Y'_{lm}(k) - Y'_{m.}(k) ^2}{K(N-M)} \quad (3)$		$f_{\varepsilon\varepsilon}(\lambda)$
<b>Total</b>			

Tabela 3.4: ANOVAF quadrado médio para os testes (3.24) e (3.25) na frequência  $\lambda$ .

O teste para (3.24) pode ser realizado utilizando a estatística:

$$F_{02}(\lambda) = \frac{2SQH_{02}(\lambda)/2K(M-1)}{2SQR_{02}(\lambda)/2K(N-M)} \quad (3.35)$$

que tem uma distribuição  $F$  com parâmetro de não centralidade  $\frac{\sum_k \sum_{m=1}^M L_m |\Gamma'_m(k)|^2}{f_{\varepsilon\varepsilon}(\lambda)}$ . Sob  $H_{02}$ , (3.35) tem uma distribuição  $F(2K(M-1), 2K(N-M))$  para  $0 \leq \lambda \leq \pi$ .

A estatística para o teste (3.25) é dada por:

$$F_{03}(\lambda) = \frac{2SQH_{03}(\lambda)/2K}{2SQR_{03}(\lambda)/2K(N-M)} \quad (3.36)$$

que tem uma distribuição  $F$  com parâmetro de não centralidade  $\frac{N \sum_k |\Omega'(k)|^2}{f_{\varepsilon\varepsilon}(\lambda)}$ . Sob  $H_{03}$ , (3.36) tem uma distribuição  $F(2K, 2K(N-M))$  para  $0 \leq \lambda \leq \pi$ .

Mais informações, ver Brillinger (1980).

Se quisermos usar os componentes espectrais não suavizados para testar (3.24) e (3.25), na frequência  $\lambda_k = \frac{2\pi k}{T}, k = 0, 1, \dots, \frac{[T-1]}{2}$ , usaremos as estatísticas

$$F_{02}(\lambda_k) = \frac{2 \sum_{m=1}^M L_m |Y'_{.m}(k) - Y'_{..}(k)|^2 / 2(M-1)}{2 \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^{L_m} |Y'_{lm}(k) - Y_{.m}(k)|^2 / 2(N-M)} \quad (3.37)$$

e

$$F_{03}(\lambda_k) = \frac{2N |Y'_{..}(k)|^2 / 2}{2 \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^{L_m} |Y'_{lm}(k) - Y_{.m}(k)|^2 / 2(N-M)} \quad (3.38)$$

com parâmetros de não centralidade  $\frac{\sum_m L_m |\Gamma'_m(\lambda_k)|^2}{f_{\varepsilon\varepsilon}(\lambda_k)}$  e  $\frac{N |\Omega'(k)|^2}{f_{\varepsilon\varepsilon}(\lambda)}$ , que sob  $H_{02}$  e  $H_{03}$ , têm distribuições  $F(2(M-1), 2(N-M))$  e  $F(2, 2(N-M))$ , respectivamente.

O efeito do tratamento  $\Gamma'_m(k)$  pode ser estimado por:

$$\Gamma'_m(k) - Y'_{..}(k) \quad (3.39)$$

com

$$E(Y'_{.m}(k) - Y'_{..}(k)) = \Gamma'_m(k)$$

e

$$Var(Y'_{.m}(k) - Y'_{..}(k)) = \frac{L_m - 1}{L_m} f_{\varepsilon\varepsilon}(\lambda).$$

#### 4. Descrição dos Dados

No presente estudo, os dados desta aplicação referem-se aos retornos de ativos mensais no setor de comércio, de alimentos e bebidas, de finanças e seguros, de siderurgia e metalurgia, de telecomunicações e de têxtil, durante o período entre junho de 2006 e março de 2012, esses dados foram coletados no programa Economática.

As ações que compõem cada portfólio estão listadas a seguir de acordo com seus códigos de cinco dígitos na Bovespa.

**Comércio**

- LAME3
- PNVL3
- LREN3
- NATU3

**Alimentos e bebidas**

- AMBV3
- JBDU3
- BRFS3
- CSAN3

**Finanças e seguros**

- CRIV3
- BEES3
- BRIV3
- BAZA3

**Siderurgia e metalurgia**

- FESA4
- GGBR4
- MTSA4
- GOAU4

**Telecomunicações**

- TELB3
- VVT3
- OIBR3
- TIMP3

**Têxtil**

- ALPA3
- CTNM3
- HGTX3
- GRND3

**5. Aplicações**

Os ativos descritos na seção 4 são subdivididos da seguinte forma:

Portfólio	Alimentos e bebidas	ação 01: AMBV3 ( $Y_{1,1}$ ) . . ação 04: CSAN3 ( $Y_{4,1}$ )
	Comércio	ação 01: LAME3 ( $Y_{1,2}$ ) . . ação 04: NATU3 ( $Y_{4,2}$ )
	Finanças e seguros	ação 01: CRIV3 ( $Y_{1,3}$ ) . . ação 04: BAZA3 (3)
	Siderurgia e metalurgia	ação 01: FESA4 ( $Y_{1,4}$ ) . .

		ação 04: GOAU4 ( $Y_{4,4}$ )
	Telecomunicações	ação 01: TELB3 ( $Y_{1,5}$ ) · · ação 04: TIMP3 ( $Y_{4,5}$ )
	Têxtil	ação 01: ALPA3 ( $Y_{1,6}$ ) · · ação 04: GRND3 ( $Y_{4,6}$ )

O modelo de planejamento com um fator fixo será aplicado com a finalidade de verificar se existe diferença de comportamento dos retornos dos ativos entre diferentes portfólios. O modelo pode ser escrito da forma:

$$Y_{lm}(t) = \mu_{lm} + \Omega(t) + \Gamma_m(t) + \varepsilon_{lm}(t),$$

em que:

$Y_{lm}(t)$  é o valor de retorno do  $l$ -ésimo ativo, sujeito ao  $m$ -ésimo portfólio, no instante  $t$ ,  $l = 1, \dots, 4$ ,  $m = 1, 2, \dots, 6$ ;

$\mu_{lm}$  é um valor médio dos valores de retornos do  $l$ -ésimo ativo, sujeito ao  $m$ -ésimo portfólio;

$\Omega(t)$  é o sinal comum dos valores de retornos de todos os ativos, no instante  $t$ ;

$\Gamma_m(t)$  é efeito (comportamento comum) do  $m$ -ésimo portfólio, no instante  $t$ ,  $m = 1, 2, \dots, 6$ ;

$\varepsilon_{lm}(t)$  é o erro aleatório.

Os dados coletados estão apresentados nas Figuras 5.1 até Figura 5.6; cada série contém 74 pontos (valores de retorno).

Notamos que aparentemente todas as séries são estacionárias sem tendência, e possuem uma variabilidade não constante. No setor Siderurgia, Comércio e Têxtil, os comportamentos dos ativos dentro de cada setor são parecidos.

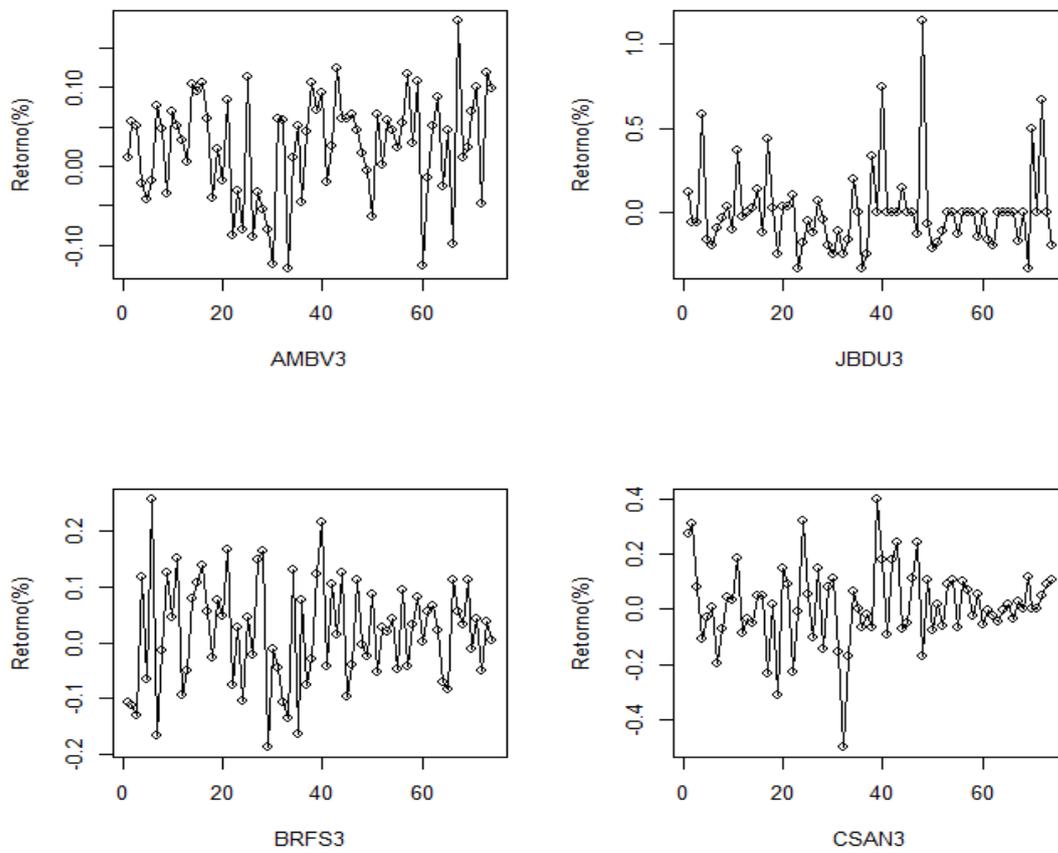


Figura 5.1: Retornos dos ativos do portfólio Alimentos e bebidas

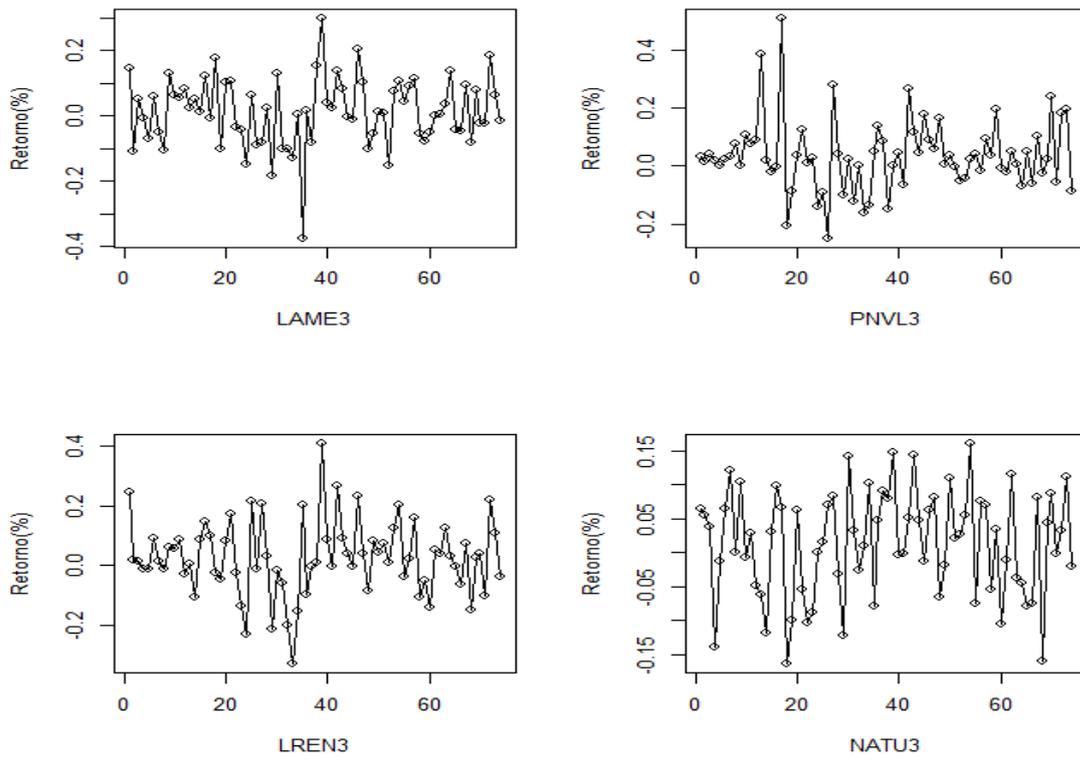


Figura 5.2: Retornos dos ativos do portfólio Comércio

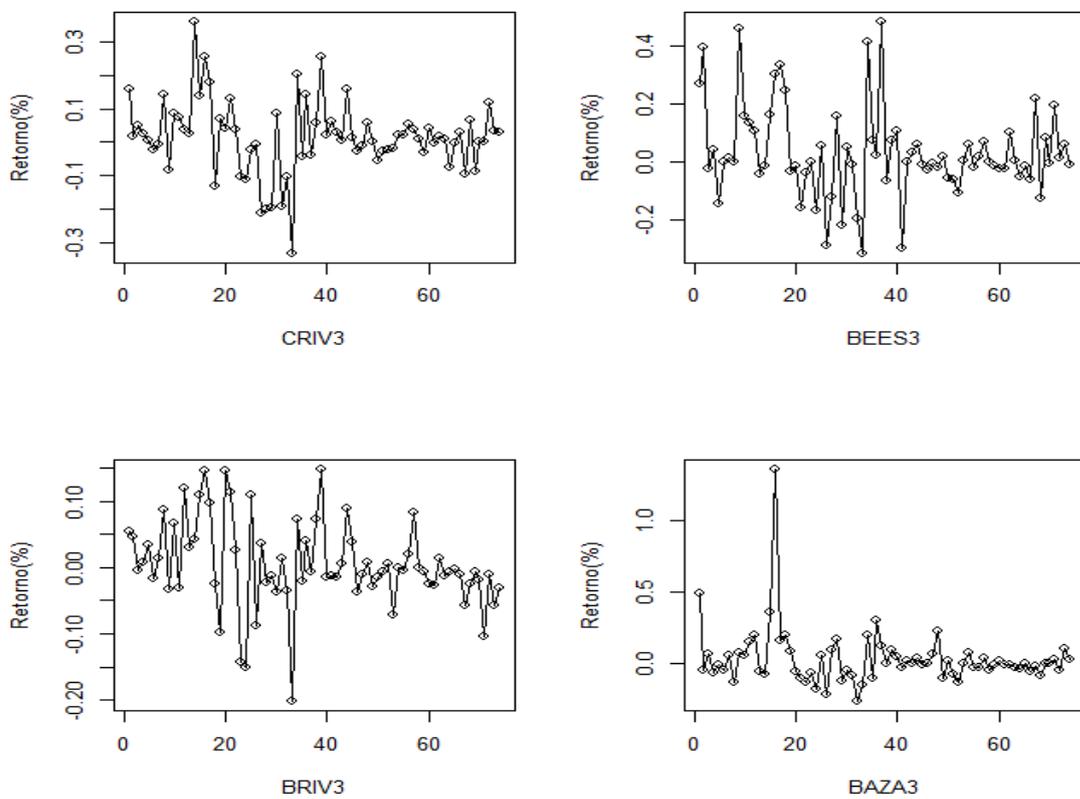


Figura 5.3: Retornos dos ativos do portfólio Finanças e seguros

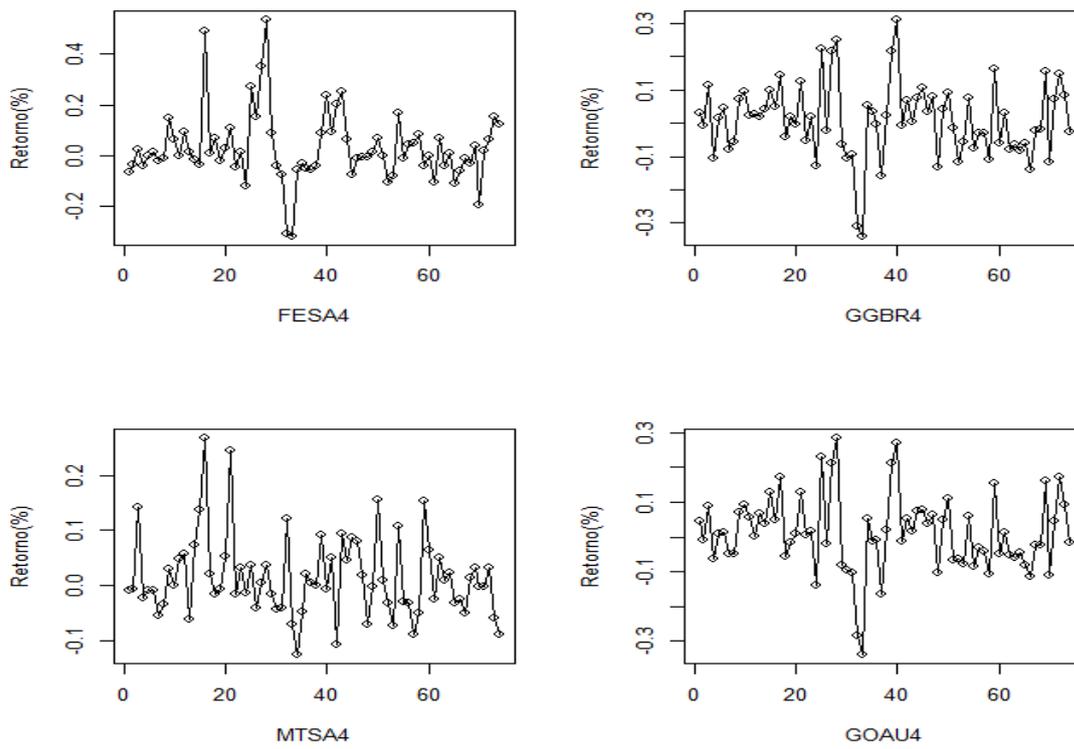


Figura 5.4: Retornos dos ativos do portfólio Siderurgia e metalurgia

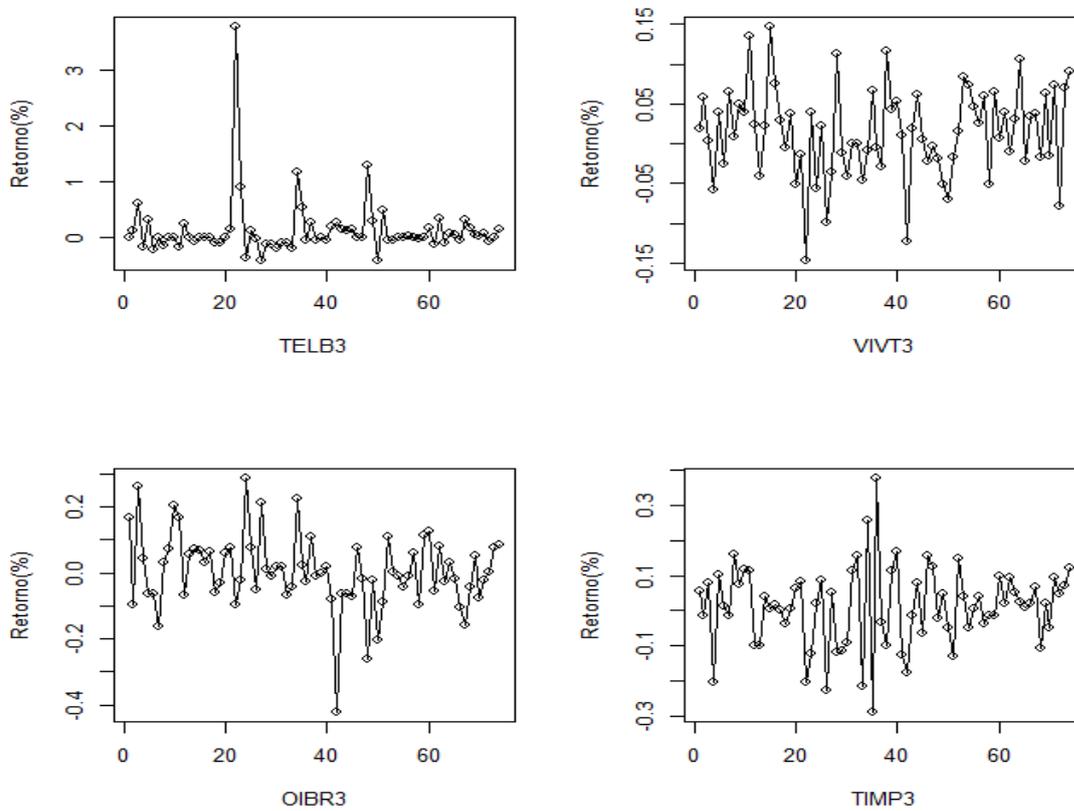


Figura 5.5: Retornos dos ativos do portfólio Telecomunicações

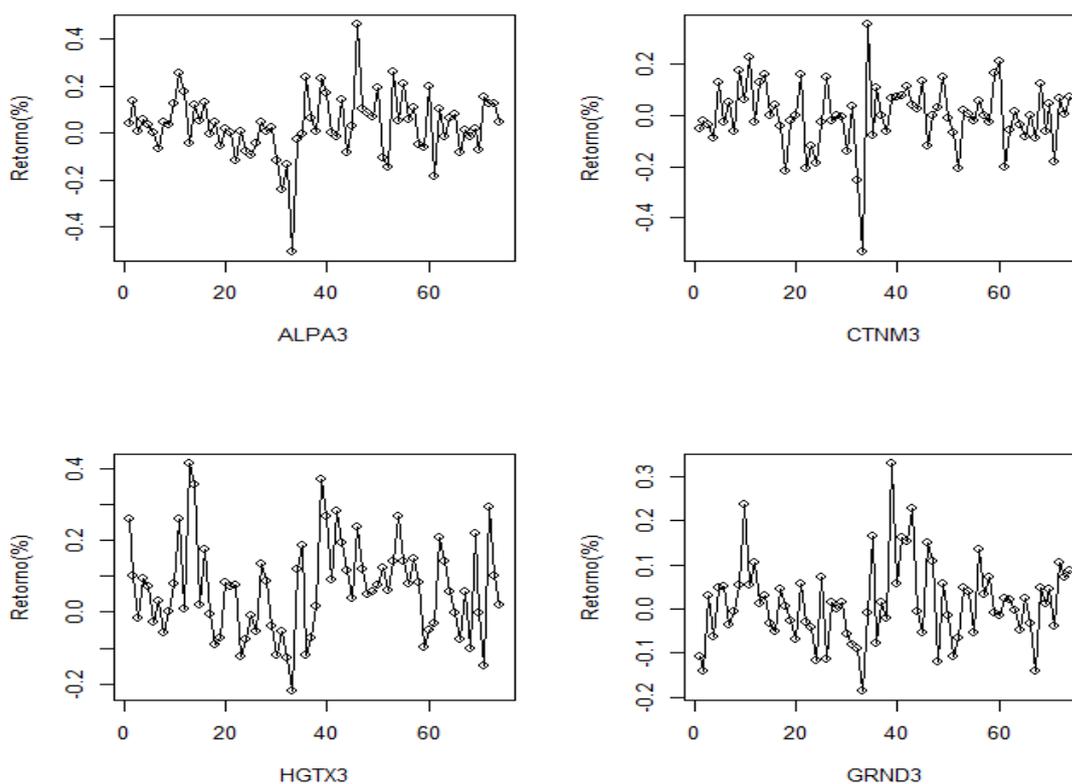


Figura 5.6: Retornos dos ativos do portfólio Têxtil

Numa **primeira etapa**, nosso interesse é verificar se existe diferença entre os retornos nos diversos portfólios (efeito dos portfólios), isto é testar a hipótese

$$H_{01}: \Gamma_1(t) = \dots = \Gamma_6(t) = 0. \quad (5.1)$$

A análise foi realizada utilizando a Tabela 3.3 e 3.4(ANOVAF). Desenvolvendo as fórmulas para um modelo com um fator fixo com 6 níveis, chegamos à Tabela 5.1 de análise de variância que deve ser utilizada neste caso.

Lembrando que o índice N e M são respectivamente, o número total das séries e o número dos setores portfólios,  $N=24$ ,  $M=6$ . O K é o tamanho de janelas de suavização, em nosso caso, a análise é feita usando os componentes não suavizados, ou seja,  $K=1$ .

Tabela 5.1: ANOVAF para o modelo com um fator fixo com 6 níveis

<i>Fonte</i>	<i>Soma de quadrados</i> (SQ)	<i>Grau de liberdade</i> (gl)
$\Omega(t)$	$24 Y'_{\cdot}(k) ^2$	2
$\Gamma_m(t)$	$\sum_{m=1}^6 L_m  Y'_{\cdot m}(k) - Y'_{\cdot}(k) ^2$	10
<i>Resíduo</i>	$\sum_{m=1}^6 \sum_{l=1}^4  Y'_{lm}(k) - Y'_{\cdot m}(k) ^2$	36
<i>Total</i>	$\sum_{m=1}^6 \sum_{l=1}^4  Y'_{lm}(k) ^2$	48

<i>Fonte</i>	<i>Quadrado médio = 2SQ/gl</i> (QM)	<i>Estatística</i> <i>F</i>	<i>Quadrado médio esperado (EQM)</i>
$\Omega(t)$	$24 Y'_{\cdot}(k) ^2$ (1)	(1)/(3)	$f_{\varepsilon\varepsilon}(\lambda) + 24f_{\Omega\Omega}^{(T)}(\lambda)$
$\Gamma_m(t)$	$\frac{\sum_{m=1}^6 L_m  Y'_{\cdot m}(k) - Y'_{\cdot}(k) ^2}{5}$ (2)	(2)/(3)	$f_{\varepsilon\varepsilon}(\lambda) + \frac{\sum_{m=1}^6 L_m f_{\Gamma_m\Gamma_m}'(\lambda)}{5}$
<i>Resíduo</i>	$\frac{\sum_{m=1}^6 \sum_{l=1}^4  Y'_{lm}(k) - Y'_{\cdot m}(k) ^2}{18}$ (3)		$f_{\varepsilon\varepsilon}(\lambda)$
<i>Total</i>			

O teste para (5.1) pode ser realizada usando a estatística

$$F_{01}(\lambda_k) = \frac{\frac{\sum_{m=1}^6 L_m |Y'_{\cdot m}(k) - Y'_{\cdot}(k)|^2}{5}}{\frac{\sum_{m=1}^6 \sum_{l=1}^4 |Y'_{lm}(k) - Y'_{\cdot m}(k)|^2}{18}} \quad (5.2)$$

que sob  $H_{01}$ , tem distribuição F(10,36), para  $0 \leq \lambda < \pi$ ,  $\lambda = \frac{2\pi s}{T}$ ,  $s = 0, 1, \dots, T - 1$ ;  $T = 74$

A Figura 5.7 mostra os resultados da estatística (5.2). A linha horizontal indica o nível crítico 0,05 de uma distribuição F(10, 36), observamos que efeitos dos portfólios aparecem nas baixas frequências, ou seja, nos períodos longos. Cada um dos pontos da Figura 5.7 representa o grau de diferença entre

os retornos nos diversos portfólios, isto é, quanto maior o valor da ordenada em uma determinada frequência maior será a diferença dos periodogramas entre os retornos de diversos portfólios. Os valores da estatística (5.2) nas frequências significantes estão listados na Tabela 5.1.

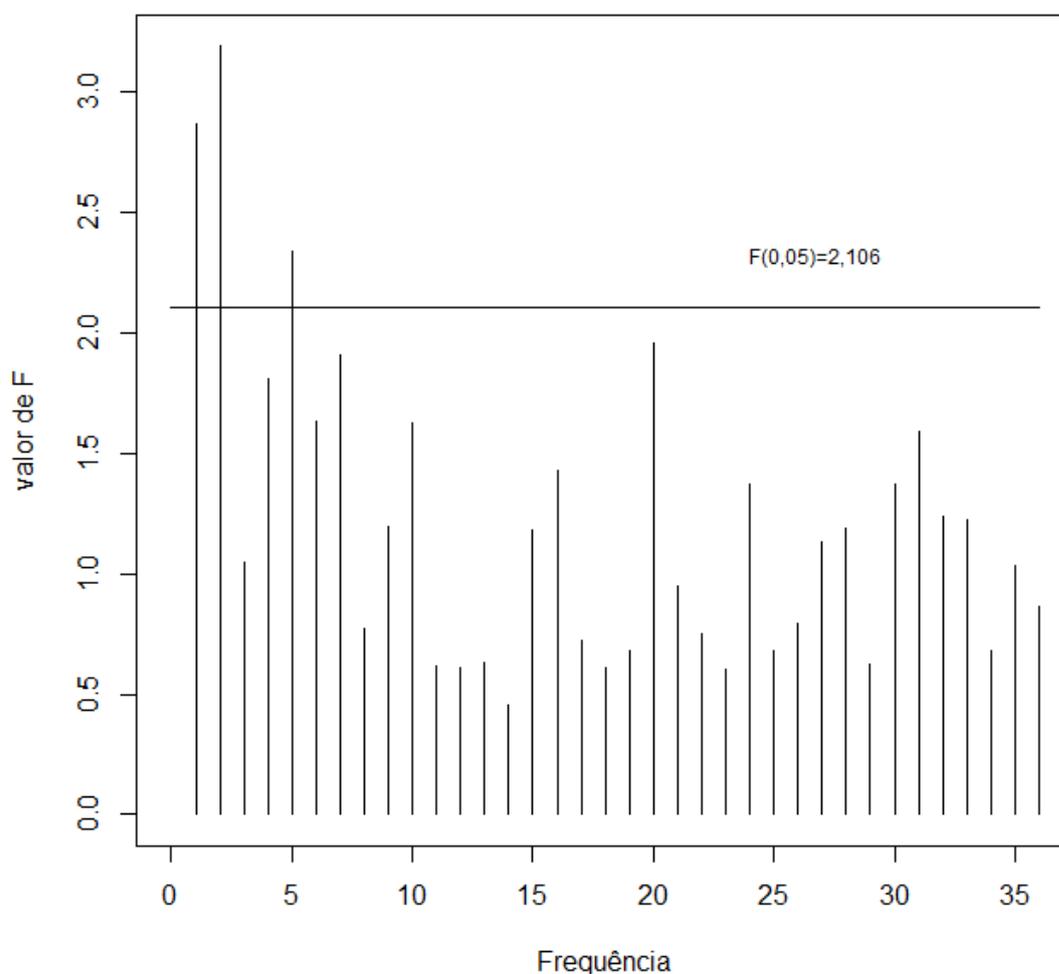


Figura 5.7: Estatística (5.2) para verificar efeito dos portfólios

Índice	frequência	período	estatística F	nível descritiva
1	0,085	11,777	2,863	0,010
2	0,170	5,889	3,186	0,005
5	0,425	2,355	2,333	0,031

Tabela 5.1: Frequências selecionadas pelo teste (5.2)

Analisando os resultados da Tabela 5.1, vemos que existe uma diferença entre os diversos portfólios, no comportamento dos retornos nos períodos aproximados de 12, 6 e 3 meses.

Como foram detectados efeitos dos portfólios, agora numa **segunda etapa**, podemos construir os retornos comuns de cada setor.

Para esta análise utilizamos o modelo (3.9)

$$Y_n(t) = \mu_n + \Omega(t) + \varepsilon_n(t), \quad n = 1,2,3,4,$$

e testamos a hipótese

$$H_{02}: \Omega(t) = 0,$$

através da estatística  $F_{02} = \frac{4|Y'(k)|^2}{\sum_{n=1}^4 |Y'_n(k) - Y'(k)|^2 / (4-1)}$ , para cada um dos grupos(portfólios), e sob  $H_{02}$  tem uma distribuição  $F(2,6)$ , para  $0 \leq \lambda < \pi$ ,  $\lambda = \frac{2\pi s}{T}$ ,  $s = 0,1, \dots, T - 1$ ;  $T = 74$ .

Os resultados estão na Figura 5.8, onde cada ponto representa o grau de similaridade entre os retornos dos ativos naquela frequência, isto é, para cada portfólio, quanto maior o valor da ordenada em uma determinada frequência, mais parecidos serão os retornos dos ativos naquela frequência. Lembrando que a reta horizontal representa o nível crítico 0,05 de uma distribuição  $F(2,6)$ . Os valores das ordenadas superiores a essas retas corresponderão às frequências comuns presentes nos retornos dos ativos do mesmo grupo. Notamos que ao nível de 0,05, temos duas frequências comuns no setor de Alimentos e bebidas, cinco no Comércio, seis no setor de Finanças e seguros, dezoito no grupo de Siderurgia e metalurgia, um no setor de Telecomunicações e nove no Têxtil. O setor Siderurgia é o portfólio que tem mais frequências comuns, ou seja, os ativos desse setor são mais parecidos do que ativos dos outros grupos. Para Alimentos e bebidas, e Telecomunicações, poucos valores estão em cima do nível crítico e também não são relevantes, isto é, o grau de similaridade entre os retornos dos ativos é baixo. Aparentemente os setores Finanças e seguros e Têxtil têm um componente

comum em baixa frequência (período longo), e para o grupo de Comércio pode apresentar um sinal comum tanto em baixa frequência quanto em alta frequência.

As Tabelas 5.2 a 5.7 apresentam as frequências comuns, cujos níveis críticos são inferiores a 0,05, para cada um dos grupos. No grupo de Alimentos e bebidas, o maior pico é  $F(1)=7,470$  (correspondente a um período de 11,777 meses, aproximadamente 12 meses) é um forte componente comum. Analogamente, no grupo Comércio o maior pico é  $F(28)=37,276$  (correspondente a um período de 0,421 meses), no grupo de Finanças e seguros o maior pico é  $F(16)=26,797$  (correspondente a um período de 0,736 meses), no grupo Siderurgia e metalurgia o maior pico é  $F(16)=41,662$  (correspondente a um período de 0,736 meses), no grupo Telecomunicações o maior pico é  $F(33)=6,086$  (correspondente a um período de 0,368 meses) e no grupo Têxtil o maior pico é  $F(5)=62,373$  (correspondente a um período de 2,355 meses).

Com base nas Tabelas 5.2 a 5.7 construímos a “série comum” de cada um dos grupos, isto é, a série que só contem as frequências comuns em cada um deles. Os resultados estão na Figura 5.8. De uma forma geral, podemos notar que para os portfólios exceto de Telecomunicações, os maiores valores dos periodogramas estão localizados em baixas frequências, estatisticamente isto significa que as baixas frequências explicam a maior parte da variabilidade dos sinais comuns obtidos. E para Telecomunicações temos a variabilidade dos sinais comuns nas altas frequências, períodos curtos.

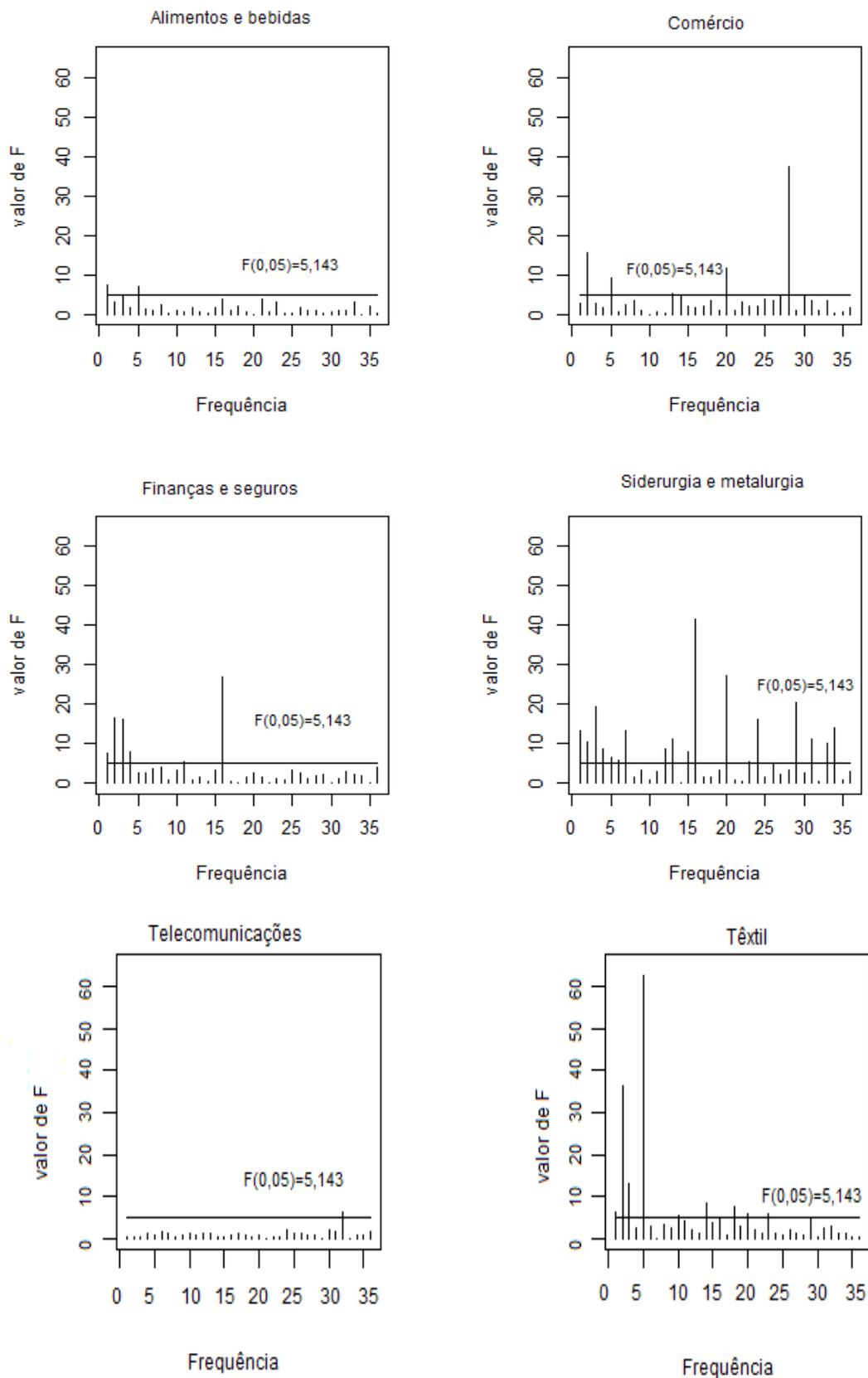


Figura 5.8: Estatística  $F_{02}$  para testar um sinal comum em cada um dos portfólios

Tabela 5.4: Frequências comuns no setor Alimentos e bebidas

Índice	frequência	período	estatística F	nível descritiva
2	0,085	11,777	7,470	0,024
6	0,425	2,355	6,956	0,027

Tabela 5.5: Frequências comuns no setor Comércio

Índice	frequência	período	estatística F	nível descritiva
3	0,170	5,889	15,683	0,004
6	0,425	2,355	9,163	0,015
14	1,104	0,906	5,504	0,044
21	1,698	0,589	11,701	0,008
29	2,377	0,421	37,276	0,000

Tabela 5.6: Frequências comuns no setor de Finanças e seguros

Índice	frequência	período	estatística F	nível descritiva
2	0,085	11,777	7,484	0,023
3	0,170	5,889	16,453	0,004
4	0,255	3,926	16,162	0,004
5	0,340	2,944	7,863	0,021
12	0,934	1,071	5,560	0,043
17	1,359	0,736	26,797	0,001

Tabela 5.7: Frequências comuns no setor Siderurgia e metalurgia

índice	frequência	período	estatística F	nível descritiva
2	0,085	11,777	13,427	0,006
3	0,170	5,889	10,550	0,011
4	0,255	3,926	19,235	0,002
5	0,340	2,944	8,642	0,017
6	0,425	2,355	6,562	0,031
7	0,509	1,963	5,786	0,040
8	0,594	1,682	13,432	0,006
13	1,019	0,981	8,787	0,016
14	1,104	0,906	11,098	0,010

16	1,274	0,785	8,093	0,020
17	1,359	0,736	41,662	0,000
21	1,698	0,589	27,284	0,001
24	1,953	0,512	5,490	0,044
25	2,038	0,491	16,324	0,004
30	2,462	0,406	20,526	0,002
32	2,632	0,380	11,258	0,009
34	2,802	0,357	10,223	0,012
35	2,887	0,346	14,058	0,005

Tabela 5.8: Frequências comuns no setor Telecomunicações

índice	frequência	período	estatística F	nível descritiva
33	2,717	0,368	6,086	0,036

Tabela 5.9: Frequências comuns no setor Têxtil

Índice	frequência	período	estatística F	nível descritiva
2	0,085	11,777	6,120	0,036
3	0,170	5,889	36,122	0,000
4	0,255	3,926	12,923	0,007
6	0,425	2,355	62,373	0,000
11	0,849	1,178	5,353	0,046
15	1,189	0,841	8,207	0,019
19	1,528	0,654	7,678	0,022
21	1,698	0,589	5,808	0,040
24	1,953	0,512	5,830	0,039

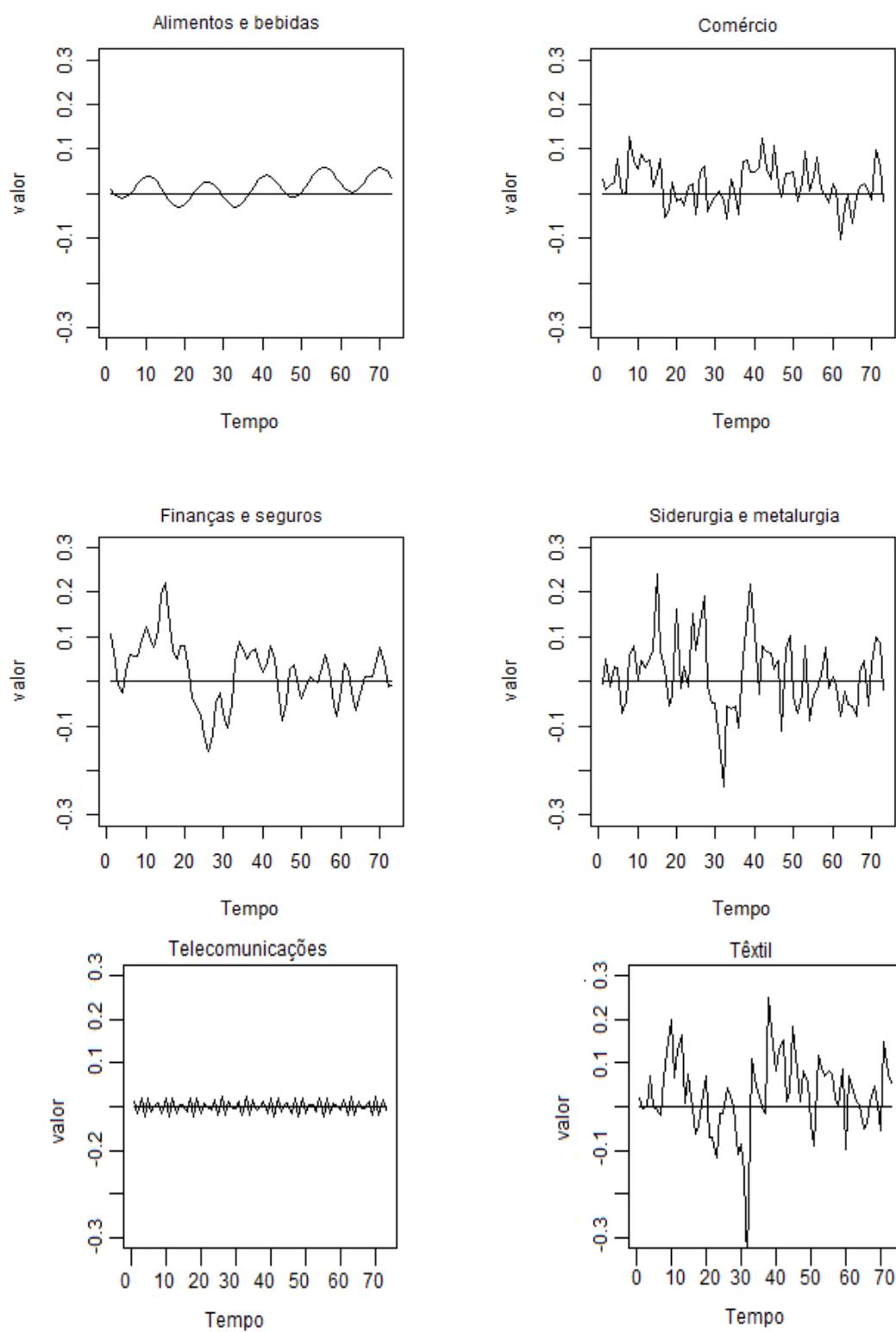


Figura 5.9: Série comum para cada um dos portfólios ao nível de 0,05

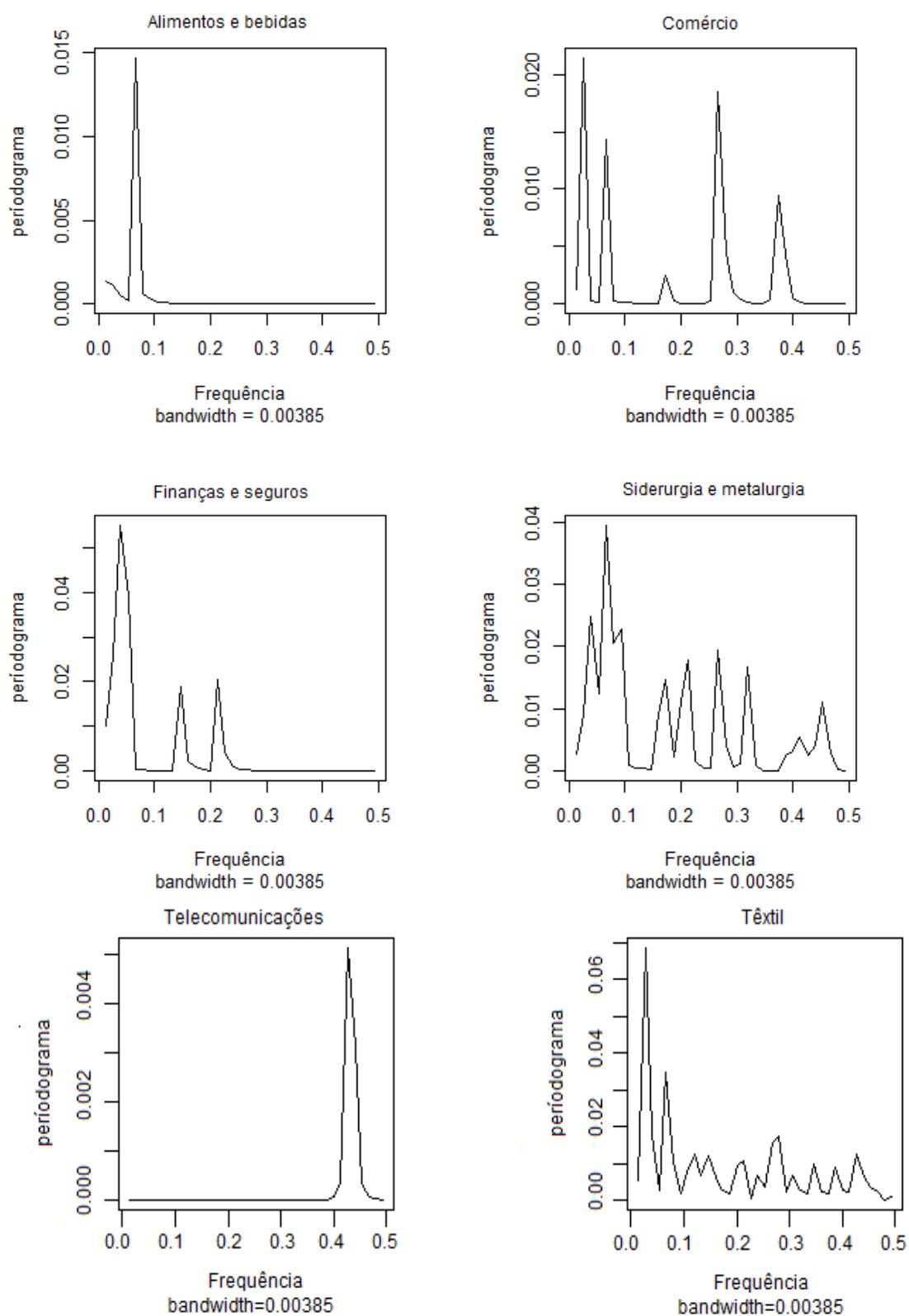


Figura 5.10: Períodograma da série comum para cada um dos portfólios

## 7. Referências Bibliográficas

1. Bloomfield, P. (2000). *Fourier Analysis of Time Series: An Introduction*. 2nd Edition. New York: John Wiley.
2. Brillinger, D.R. (1980). *Analysis of Variance Problems under Time Series Models*, in Handbook of Statistics (Vol. 1), ed. P.R.Krishnaiah, Amsterdam: North Holland, pp. 237-278.
3. Brillinger, D.R.(1981). *Time Series: Data Analysis and Theory*. 2nd. Edition. Holden-Day, San Francisco.
4. Brockwell, P.J., and Davis, R.A. (1996). *Introduction to Time Series and Forecasting*. 2nd. Edition. Springer. New York
5. Chiann, C. e Tolo, C.M.C. (1998). Alguns Modelos de Análise de Variância em Séries Temporais Utilizando Transformada de Fourier – Uma Aplicação. Revista Brasileira de Estatística, Vol. 59, N. 211, 81-112.
6. Hannan, E.J. (1970), *Multiple Time Series*, New York: John Wiley.
7. Morettin, P.A. e Tolo, C.M.C. (2006). Análise de Séries Temporais. ABE – Projeto Fisher. 2a. edição.
8. Roy, S.N., Gnanadesikan, R. and Srivastava, J.N. (1971), *Analysis and Design of Certain Quantitative Multiresponse Experiments*, Pergamon, Oxford.
9. Shumway, R.H. (1970). *Applied Regression and Analysis of Variance for Stationary*, Journal of the American Statistical Association 65, 1527-1546
10. Shumway, R.H. and Stoffer, D.S. (2006). *Time Series Analysis and Its Applications with R Examples*. Second Edition. Springer.
11. Vinha, L. G., Chiann, C. (2007). Modelos fatoriais para retornos de ativos. Revista Brasileira de Estatística, v. 68, p. 1, 2007.