

MAE 5871 - Aula 3

Quatro situações:

1. **Tempo contínuo e frequência discreta;**
2. Tempo contínuo e frequência contínua;
3. Tempo discreto e frequência contínua;
4. **Tempo discreto e frequência discreta.**

Tempo Contínuo e frequência Contínua

Suponha agora que $f(t)$ *não seja periódica*, logo *não podemos representa-la* na forma:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\lambda_n t}. \quad (1)$$

Vamos considerar a forma

$$f_T(t) = f(t), \quad -T/2 \leq t \leq T/2,$$

e então estender $f_T(t)$ periodicamente a toda reta:

$$f_T(t + pT) = f_T(t), \quad p = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Se a função $f_T(t)$ for de quadrado integrável, temos,

$$f_T(t) \stackrel{m}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_{n,T} e^{i\lambda_n t}$$

Com $\lambda_n = 2\pi n/T$

$$F_{n,T} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) e^{-i\lambda_n t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\lambda_n t} dt$$

Considerar $\Delta\lambda = \lambda_n - \lambda_{n-1} = 2\pi/T$,

$$f(t) = f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-i\lambda_n t} dt \right] e^{i\lambda_n t} \right\} \frac{\Delta\lambda}{2\pi}$$

$T \rightarrow \infty, \Delta\lambda \rightarrow 0$,

$$f(t) \stackrel{m}{=} \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) e^{i\lambda t} d\lambda, \quad (1.25)$$

$$F(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt. \quad (1.26)$$

Se $f(t)$ for de quadrado integrável, (1.25) e (1.26) estão bem definidas em $L_2(\mathbb{R})$.

(1.25): representação de $f(t)$ como uma integral de Fourier.

(1.26): $F(\lambda)$ é a transformação de Fourier de $f(t)$.

$F(t)$ e $F(\lambda)$ são denominadas pares de Fourier.

Teorema de Parseval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\lambda)|^2 d\lambda$$

$|F(\lambda)|^2$: função de densidade espectral de energia de $f(t)$ que pode ser comparada com uma função densidade de probabilidade.

Tempo discreto e frequência contínua

Suponha $f(t)$ uma função de quadrado integrável:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty$$

e queremos amostrá-la em intervalos de tempos equiespacados, $0, \pm\Delta t, \pm2\Delta t, \dots$

A transformada de Fourier da sequência

$$f_t = f(t\Delta t), \quad t = \dots, \pm 1, \pm 2, \dots$$

é definida por:

$$F_{\Delta}(\lambda) = \frac{\Delta t}{2\pi} \sum_{t=-\infty}^{\infty} f_t e^{-i\lambda t\Delta t}$$

Período: $2\pi/\Delta t$

Sendo que a transformada inversa é:

$$f_t = \int_{-\frac{\pi}{\Delta t}}^{\frac{\pi}{\Delta t}} F_{\Delta}(\lambda) e^{i\lambda t\Delta t} d\lambda$$

Teorema de Parseval:

$$\Delta t \sum_t |f_t|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{\Delta t}}^{\frac{\pi}{\Delta t}} |F_{\Delta}(\lambda)|^2 d\lambda$$

Caso Especial: $\Delta t = 1$.

Fenomeno de Aliasing: ocorre quando amostramos uma função contínua em intervalos de tempo igualmente espaçados.

$$\begin{aligned}
 f_t = f(t\Delta t) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) e^{i\alpha t\Delta t} d\alpha \\
 &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{\frac{\pi(j-1)}{\Delta t}}^{\frac{\pi(j+1)}{\Delta t}} F(\alpha) e^{i\alpha t\Delta t} d\alpha \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{\Delta t}}^{\frac{\pi}{\Delta t}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} F\left(\lambda + \frac{2\pi j}{\Delta t}\right) e^{i\lambda t\Delta t} d\lambda, \quad \lambda = \alpha - \frac{2\pi j}{\Delta t}
 \end{aligned}$$

Comparando com

$$f_t = \int_{-\frac{\pi}{\Delta t}}^{\frac{\pi}{\Delta t}} F_{\Delta}(\lambda) e^{i\lambda t\Delta t} d\lambda$$

Temos:

$$F_{\Delta}(\lambda) = \sum_j F\left(\lambda + \frac{2\pi j}{\Delta t}\right), \quad |\lambda| \leq \frac{\pi}{\Delta t}$$

A transformada de Fourier, na frequência λ , da sequência amostrada f_t é igual à soma das transformadas de Fourier de $f(t)$, nas frequências $\lambda, \lambda \pm 2\pi/\Delta t, \lambda \pm 4\pi/\Delta t, \dots$

Dizemos que λ é **aliás** de $\lambda \pm 2\pi/\Delta t, \lambda \pm 4\pi/\Delta t, \dots$

A maior frequência que não seja aliás de outra frequência no intervalo $(-\pi/(2\Delta t), \pi/(2\Delta t))$ é $\pi/(\Delta t)$, chamada frequência de Nyquist, indicada por λ_N .